Как кошки падают на лапы
и ещё 76 парадоксов и головоломок

Марк Леви

перевод Р. Г. Матвеева и А. М. Петрунина
под редакцией Марка Леви

Предварительное издание, предназначенное исключительно для отлова ляпов.

Исправления слать по адресу `petrunin@math.psu.edu`.

Моим детям и внукам.

Оглавление

Благодарности

Я признателен Полу Нахину за несколько полезных замечаний, в частности за ссылки, касающиеся парадокса Бресса, Карол Швагер — за многочисленные улучшения изложения, и Вики Керн, чья поддержка придавала мне силы продолжать работу. Я также благодарен Национальному научному фонду США за поддержку, грант № 1009130.

Глава 1

Физические парадоксы, задачи и головоломки

1.1 Введение

Хороший физический парадокс — это и неожиданность, и головоломка, и урок, причём всё это в красивой упаковке. Обычно парадокс строится на очень убедительном рассуждении, которое либо приводит к неверному, но правдоподобному выводу, либо к верному, но настолько неожиданному, что поначалу кажется ошибочным. В любом случае появляется сильное желание разобраться, что к чему. В годы холодной войны ходила байка, что ЦРУ мешало работе советских военных НИИ, подбрасывая листовки с головоломками и логическими задачами. Времена изменились, теперь те же задачи используются при приёме на работу. Советский пропагандист сказал бы, что они остались орудиями капитализма.

Парадоксы не только увлекательны, но и полезны. Они развивают интуицию, логическое мышление и критический подход, так что у человека развивается внутренний детектор лжи. Хороший парадокс также учит скромности и осторожности, показывая, как легко ошибиться даже в элементарных вопросах физики. Успокаивает, что даже очень умные люди допускают ошибки в, казалось бы, очевидных вопросах. А ведь объекты других областей (астрономии, биологии, медицины, экономики, климатологии, политики, журналистики) посложней[1], чем в физике, а значит, там ещё легче ошибиться. Кроме

[1] Я не пытаюсь сравнивать сложности наук, просто хочу сказать, что типичный объект в физике (например, кристалл) устроен проще типичного объекта в других областях (например, клетки в биологии).

того, иногда ошибки приносят пользу, по крайней мере, они могут нас чему-то научить.

В этой книге я хотел поделиться прикольными размышлениями о том, как устроен мир. Надеюсь, они помогут вам понять суть некоторых физических явлений и при этом не измучают[2] математикой.

Эта книга по физике — науке, которая ходит на двух ногах, одна нога — это математика, а другая — физическая интуиция. К сожалению, школьная физика часто выходит хромоногой.

Сравнение с музыкой. Если бы музыке учили так же, как зачастую учат физике, то мы бы знали только ноты, но не мелодии, которые из них получаются. Увы, слишком много учеников видят в физике набор формул, которые надо лишь применить в подходящем случае, и, как следствие, много способных учеников теряют к физике интерес.

Сначала интуиция. Я хотел, чтобы эта книга натренировала вашу физическую интуицию. Слишком часто курсы физики пренебрегают интуицией, делая упор на подбор формулы, подходящей в конкретном случае. В этой книге всё наоборот: я хотел добиться максимума интуитивного понимания при минимуме формул. Обсуждение волчка — хороший тому пример; без каких-либо формул я объясню, почему вращающийся волчок остаётся в вертикальном положении. Нужны годы освоения математики и физики в достаточном объёме, чтобы научиться записывать дифференциальные уравнения движения волчка и понять, как из этих уравнений следует его устойчивость. Пройдя весь этот путь, лишь немногие придут к интуитивному пониманию, почему волчок не падает. Обидно, когда всё это время мощнейший инструмент — физическая интуиция — оказывается не у дел.

1.2 Предварительные сведения

Бóльшая часть книги (хоть и не вся) должна быть понятна без специальной подготовки в физике; всё необходимое объясняется в приложении. Обычно математика остаётся в рамках алгебры, но изредка используется математический анализ. Но даже в этих местах читатель, готовый принять на веру кое-какие математические выкладки, будет чувствовать себя сносно.[3]

[2] Я говорю о «мучениях» с иронией — математика, разумеется, незаменима и прекрасна, по крайней мере для меня, уже потому, что это моя профессия.

[3] Речь идёт, например, о задаче с пращой на странице 86, где камень достигает бесконечной скорости за секунду.

Тяга к новому — основной инстинкт большинства живых существ или, по крайней мере, млекопитающих. Побуждая нас к исследованию, этот инстинкт помогает выживать — за исключением некоторых случаев, вроде лауреатов «Премии Дарвина» или героев шоу «Чудаки»[4]. Тот же самый инстинкт, который привёл Эйнштейна к его великим открытиям, толкает ребёнка разобрать механические часы и заглянуть внутрь. Он же побуждает щенков и котят исследовать окружающий мир, а у некоторых людей этот инстинкт даже способен противостоять системе школьного образования.

1.3 Источники

Собирать подобные задачи посоветовал мне отец после того, как увидел одну мою головоломку; она пришла мне в голову после школьного урока о капиллярном эффекте (см. страницу 113). Из этой коллекции и выросла данная книга. Многие задачи придуманы мной[5], но *я уверен, что кто-то уже задумывался над ними или чем-то похожим задолго до моего рождения.* Если мне известен автор или источник, то я его указываю.

Книжная полка. К счастью, многое из основ физики можно понять, получив от этого удовольствие и (почти) без формул — несколько замечательных научно-популярных книг тому подтверждение; среди них — *The Flying Circus of Physics* Уолкера, *Thinking Physics* Эпштейна, *Mad about Physics* Яргодзки и Поттера, а также классическая *Занимательная физика* Перельмана. К сожалению, шикарная книга Маковецкого *Смотри в корень*, которая разошлась миллионным тиражом в Советском Союзе, похоже, так и не была переведена на английский. Книга Миннарта *The Nature of Light and Color in the Open Air* никогда не устареет и доставит радость каждому любознательному человеку, которому посчастливится её открыть.

---

[4] англ. «Jackass», иногда переводится как «Придурки». — *Прим. ред.*

[5] Например, 2.1, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 4.1, 4.2, 4.4—4.6, 5.3—5.8, 6.6, 6.7, 6.10—6.12, 8.2, 8.5, 8.6, 9.4, 11.1, 12.3, 13.2, 14.6, 14.8.

Глава 2

В открытом космосе

2.1 Шарик с гелием

Задача Два космонавта, Андрей и Боря, пристёгнуты к противоположным концам космической капсулы, как показано на рисунке 2.1. В начале всё находится в покое и Андрей держит в руках большой шарик, надутый гелием. Он толкает шарик, и тот начинает двигаться в сторону Бори. В каком направлении начнёт двигаться вся капсула с точки зрения наблюдателя, парящего в открытом космосе снаружи? Поскольку Андрей и Боря пристёгнуты к стенкам, их можно считать частью капсулы.

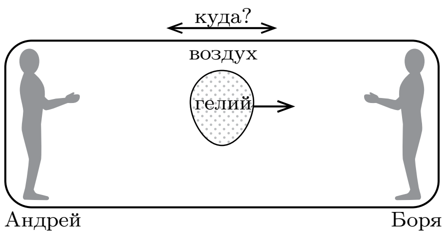


Рис. 2.1: Куда двинется капсула, когда Андрей толкнёт шар?

Правдоподобное рассуждение. Поскольку Андрей толкает шарик вправо, шарик отталкивает Андрея влево, ведь по третьему закону Ньютона «действие равно противодействию». А раз шарик толкает Андрея влево, то он и вся капсула начнут двигаться влево.

Похоже ли это на правду?

Ответ. На самом деле — нет: капсула тоже будет двигаться вправо!

Объяснение через центр масс. Центр масс всей системы (капсулы и её содержимого) остаётся неподвижным, поскольку на систему не действуют внешние силы (все понятия этого предложения объясняются в приложении, страница 142).

Рассмотрим движение внутри капсулы *с точки зрения Андрея*, как показано на рисунке 2.2. Шарик имеет гораздо меньшую массу, чем вытесняемый им воздух. Значит, с точки зрения Андрея, центр масс смещается *влево*. Напомним, что центр масс всей системы без внешних сил остаётся неподвижным. Поэтому с точки зрения внешнего наблюдателя Андрей и вся капсула движутся вправо.

Ошибка была в том, что, уделив всё внимание шарику, я упустил из виду более массивный воздух, который перемещается влево, занимая его место.

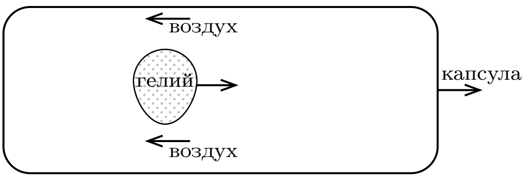


Рис. 2.2: Движение относительно капсулы (и Андрея).

То же самое через импульс. В приложении (страницы 149—152) объясняется, что неподвижность центра масс эквивалентна тому, что суммарный импульс остаётся равным нулю.

С точки зрения Андрея, вытесненный воздух движется влево. Это означает, что сам Андрей (вместе с капсулой) обязан двигаться вправо, чтобы скомпенсировать движение воздуха и держать суммарный импульс нулевым.

Всё станет совсем очевидным, если довести соотношение масс до крайности, как показано на рисунке 2.3, где вместо гелия с воздухом берётся гелий с водой. Поскольку почти вся масса приходится на воду, она практически не движется. А значит, когда шарик с гелием перемещается вправо, оболочка капсулы (чьей массой мы пренебрегаем) тоже движется вправо, уступая место гелию.

Назойливое сомнение. Приведённый выше ответ верен. Но разве я не доказал противоположное на странице 13, в подразделе с правдоподобным рассуждением? Где же там спрятана ошибка?

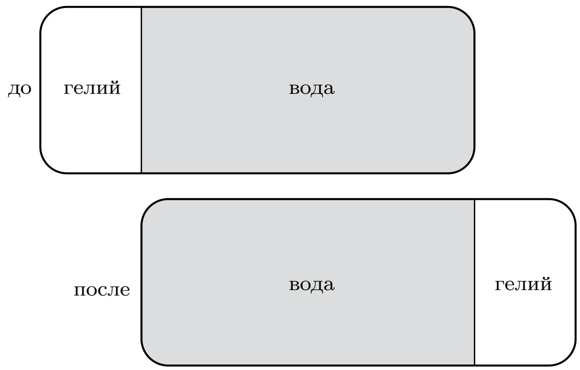


Рис. 2.3: Вода остаётся на месте, а почти невесомая оболочка капсулы сдвигается вправо.

Ответ. Ошибка в том, что не были учтены *все* силы, действующие на Андрея. Мы забыли о силе со стороны оболочки капсулы! Когда Андрей толкает шарик, эта сила передаётся через воздух к оболочке, и та в свою очередь толкает Андрея в спину. Удивительно, но оболочка толкает Андрея сильней, чем Андрей шарик. По сути, ударив шарик, Андрей ещё сильнее ударил себя в спину! Довольно удивительно (особенно для Андрея). А как же это происходит? Интуитивное объяснение этому даст следующий параграф.

Как пнуть себя в спину своим же коленом? Этот параграф объяснит, как может капсула толкать Андрея сильнее, чем он толкает шарик. Чтобы легче это прочувствовать, ненадолго упростим задачу: будем считать, что шарик надут не гелием, а воздухом. Значит, когда Андрей толкает шарик, он лишь перераспределяет воздух внутри капсулы.[1] Перемещение воздуха внутри капсулы не меняет его центр масс, а значит, ни капсула, ни Андрей не будут двигаться. По первому закону Ньютона равнодействующая сила на Андрея будет равна нулю: *его ладони и спина ощутят равные противоположнонаправленные силы.*

А что изменится, если воздух в шарике заменить гелием? У шарика уменьшится инерция, то есть его будет легче ускорять. Поэтому ладони Андрея ощутят меньшую силу при той же силе в спину.

Детское воспоминание. Ту же ошибку я допустил в детстве, реализуя свою мечту летать. В один прекрасный день меня осенило —

[1]Предполагается, что оболочка шарика невесома.

я забрался на стул, схватился за сиденье и начал изо всех сил тянуть его вверх. Я думал, что сиденье потащит меня вверх, а сам я превращусь в человека-ракету, а ножки стула будут как антенны у спутника. Но взлёт не удался, ведь я упустил из виду, что мои руки (косвенно) соединены с моим задом (это стечение обстоятельств сейчас кажется очень удачным и логичным), таким образом, мой зад толкал сиденье вниз, сводя на нет подъёмную силу рук. Я давил на стул двумя частями своего тела, но одну не учёл.

Сходство с разобранным парадоксом должно быть очевидно. Как и в первом рассуждении, я не учёл все силы. Андрей связан с шариком не только руками, но и спиной — через оболочку и воздух; эту вторую связь я и упустил в первом рассуждении.

2.2 Управление спутником без реактивных двигателей

Задача. Может ли спутник изменить свою орбиту вокруг Земли, не пользуясь реактивными двигателями, солнечным ветром и тому подобными средствами тяги? Разрешается использовать солнечные панели для сбора энергии.

Подсказка. Воспользуйтесь тем, что сила тяжести зависит от расстояния до Земли; спутник не обязан быть материальной точкой.

Ответ. Самый простой спутник, для которого это сработает, состоит из двух масс, соединённых тросом. Мотор, питающийся солнечной энергией, будет менять длину троса. Давайте считать, что спутник движется по орбите, вращаясь, как показано на рисунке 2.4.

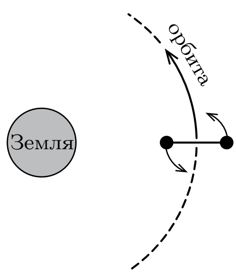


Рис. 2.4: Гантелеобразный спутник регулируемой длины.

Орбиту нашего спутника можно поднять или опустить, если надлежащим образом регулировать длину троса! Будем считать, что спутник изначально вращается и движется по орбите, как показано на рисунке 2.4. Допустим, мы хотим понизить орбиту. Для этого будем подтягивать трос, когда он направлен к Земле, и ослаблять его, когда он почти перпендикулярен направлению к Земле. Повторяя это раз за разом на каждом обороте, мы заставим спутник снижаться. Если же надо поднять орбиту, то следует делать всё наоборот.

Суть дела. Из-за вращательного (кувыркательного) движения трос испытывает центробежное натяжение. Но не только центробежное: натяжение слегка меняется из-за приливного эффекта, это объясняет рисунок 2.5.

Как показано на рисунке, натяжение троса больше, когда он направлен к Земле, ведь массы A и B в этот момент находятся на разных расстояниях от Земли, и разница сил притяжения в A и B растягивает трос.[2] Эту переменную силу натяжения можно использовать

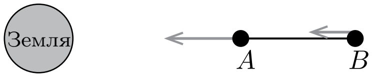


Рис. 2.5: Трос натягивается потому, что притяжение в точке A сильнее, чем в точке B.

для ускорения вращения. Натягивая трос, когда натяжение больше, и ослабляя его, когда оно меньше, мы совершаем работу. Эта работа идёт на увеличение скорости вращения.[3] Поскольку суммарный момент импульса[4] сохраняется, увеличение вращательного момента приводит к уменьшению орбитального. Ну а уменьшение орбитального момента означает, что спутник *понижает* свою орбиту — это будет объяснено чуть ниже.

Объяснение размазыванием. Есть ещё один способ понять, как увеличивается момент импульса спутника. Представьте, что массы

[2] Тот же эффект отвечает за приливное вытягивание Земли вдоль прямой Луна—Земля.

[3] По этому же принципу раскачиваются качели. Мы поднимаем часть тела, когда перегрузка больше, и опускаем, когда она меньше. Так мы совершаем работу, которая переходит в движение качелей (подробнее это обсуждается на страницах 55—56). Такой приём «покупай дорого, продавай дёшево» прекрасно работает для подкачки энергии в систему, но привёл бы к разорению при игре на бирже.

[4] На странице 153 приводится краткая справка о моменте импульса.

двух шариков, составляющих гантель, размазаны вдоль их траекторий, как на рисунке 2.6. То есть мы заменили две массы на что-то

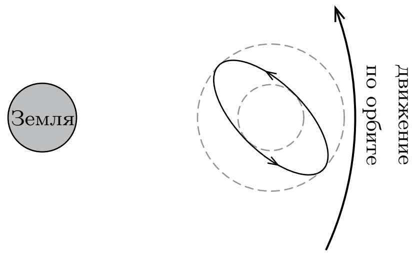


Рис. 2.6: Для понижения орбиты укорачивайте трос, когда он направлен к Земле.

вроде обруча из провода. Суть в том, что наш обруч отклоняется от радиального направления к Земле. Поэтому на него действует момент силы, ведь ближе к Земле притяжение сильней. Этот момент пытается повернуть обруч против часовой стрелки, то есть *увеличивает* его момент импульса — в точности как мы утверждали в исходном объяснении. (Та же идея с размазыванием используется при объяснении движения гимнаста на странице 57.)

Уточнения. Вот пара уточнений к предыдущим объяснениям, включая то, что при повышении орбиты увеличивается орбитальный момент.

Поскольку сила тяжести направлена строго к центру Земли, она не может менять полный момент импульса спутника.[5] Значит, полный момент импульса $M_{\text{полн}}$ спутника относительно центра Земли остаётся постоянным, независимо от того, что мы делаем с тросом; то есть

$$M_{\text{полн}} = M_{\text{вращ}} + M_{\text{орб}} = \text{const}.$$

Таким образом, увеличивая вращательный момент $M_{\text{вращ}}$, мы уменьшаем орбитальный момент $M_{\text{орб}}$. А этот момент связан с радиусом орбиты r формулой

$$M_{\text{орб}} = k\sqrt{r}, \tag{2.1}$$

где $k = m\sqrt{GM}$; здесь m — масса спутника, G — гравитационная постоянная, а M — масса Земли.[6] Согласно этой формуле, при уменьшении $M_{\text{орб}}$ уменьшается и радиус орбиты r. Это подтверждает ранее

[5] Это не совсем правда, поскольку Земля не совсем круглая, но не будем обращать на это внимание.

[6] Действительно, при движении по круговой орбите радиуса r, непосредственно

сделанное утверждение: ускоряя вращение (кувыркание), мы уменьшаем орбитальный момент, и значит спутник снижается.

Другие манёвры. Можно добиться большего. Например, можно менять эксцентриситет орбиты. Однако разбираться в этом вам придётся самостоятельно.

2.3 Парадокс с кометой

Обсуждение движения пушечных ядер часто начинают с того, что горизонтальная скорость ядра не меняется, поскольку в горизонтальном направлении не действуют никакие силы (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Вот попытка применить то же рассуждение для движения в открытом космосе.

Солнце может лишь притягивать к себе комету и не может раскручивать её вокруг себя, ведь сила притяжения всегда направлена точно в сторону Солнца (см. рисунок 2.7). Иными словами, сила солнечного притяжения не имеет компоненты в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей Солнце и комету: $F_\perp = 0$. Поскольку сила в перпендикулярном направлении равна нулю, по первому закону Ньютона (если сила нулевая, то скорость не меняется), получаем, что компонента скорости $v_\perp$ в этом направлении не меняется.

Но что-то не так, ведь момент импульса[7] кометы обязан сохраняться:

$$M = mv_\perp \cdot r = \mathrm{const},$$

где r — расстояние от кометы до центра Солнца. Поскольку r меняется по мере движения кометы по эллиптической орбите, компоненте скорости $v_\perp$ придётся меняться, чтобы произведение $v_\perp \cdot r$ оставалось неизменным. Что же из этого верно (если верно хоть что-то)?

Решение. Ошибка в первом рассуждении: я неверно использовал первый закон Ньютона. Этот закон справедлив только в инерциаль-

---

из определения момента импульса получаем, что

$$M_{\text{орб}} = mvr. \tag{2.2}$$

Здесь v — это скорость, и она связана с r вторым законом Ньютона. Согласно этому закону, центростремительное ускорение $\frac{v^2}{r}$ определяется силой притяжения:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2},$$

и значит $v = \sqrt{GM}/\sqrt{r}$. Подставив это выражение в (2.2), получим (2.1).

[7] Определения и пояснения даны на странице 153.

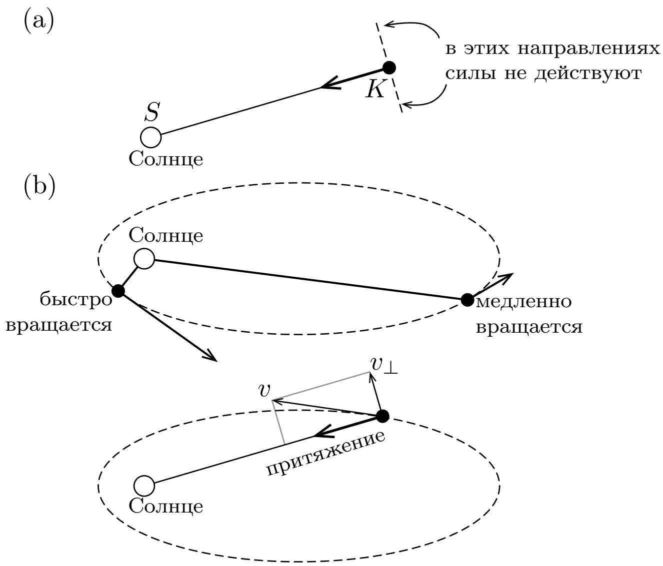


Рис. 2.7: (a) Никакая сила не действует перпендикулярно к линии SK. Остаётся ли $v_\perp$ постоянной? (b) Линия Солнце—комета поворачивается быстрее, когда комета ближе к Солнцу.

ной системе отсчёта,[8] то есть я наивно, неявно и неверно предположил, что прямая SK есть ось координат инерциальной системы. Но ось SK вращается, а значит, эта система не инерциальна.

2.4 Хочешь медленнее — разгоняйся![9]

Вопрос. Космический корабль движется по круговой орбите вокруг планеты. Желая повысить орбиту, космонавт включает двигатели, разгоняя корабль вперёд. После выхода на новую круговую орбиту двигатели выключаются. Пока работали двигатели, кораблю сообщалось ускорение примерно в направлении движения; движется ли теперь он быстрее, чем раньше?

Ответ. На самом деле корабль сбавил скорость.

[8] То есть в системе отсчёта, которая движется без ускорения и без вращения. Подробности по закону Ньютона даны в приложении на странице 142.

[9] Эта же задача обсуждается в книге «Смотри в корень!» Маковетского [13, Задача 22 «Хочешь быстрее — тормози»]. — *Прим. ред.*

Объяснение. Ответ покажется не столь странным, если подумать о езде на велосипеде; ведь, въезжая на горку, можно замедлиться даже если сильно давить на педали. То же самое происходит и с космическим кораблём: подъём орбиты — это та же горка. Энергия двигателей тратится не на ускорение, а на преодоление тяготения. Корабль получает потенциальную энергию, но теряет кинетическую; при этом прирост потенциальной энергии превышает потерю кинетической.

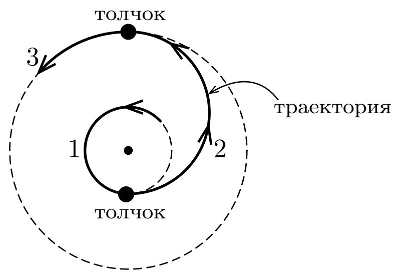


Рис. 2.8: Разгон замедляет. Два коротких импульса были приложены в отмеченных точках траектории по направлению движения. В результате орбита поднялась, но корабль сбавил скорость.

А как именно зависит орбитальная скорость v от радиуса орбиты r? Оказывается, что:

$$v = \frac{k}{\sqrt{r}},$$

где $k = \sqrt{GM}$, G — универсальная гравитационная постоянная, а M — масса планеты. Когда спутник находится на круговой орбите, второй закон Ньютона $ma = F$ говорит, что центростремительное ускорение[10] $a = \frac{v^2}{r}$ обеспечивается силой притяжения $F = GmM/r^2$, и значит,

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GmM}{r^2},$$

где m — масса спутника. Отсюда получаем

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Согласно этой формуле при подъёме (то есть при увеличении r) спутник замедляется.

[10] То есть ускорение по направлению к центру; подробности и пояснения на странице 156.

Глава 3

Во вращающейся воде

Как известно, закон Архимеда гласит, что сила, с которой вода выталкивает погружённое в неё тело (сила Архимеда), равна весу вытесненной этим телом воды.[1]

Однако во вращающемся мире, например на Земле, у закона Архимеда есть неожиданные подвороты (без игры слов), которые приводят к удивительным явлениям. Одно такое явление описано чуть ниже в парадоксе с плавающей пробкой, другой пример того же явления — парадокс айсберга (страница 28).

3.1 Плавающая пробка

Эксперимент. Парк аттракционов с вращающимся бассейном — мечта любого ребёнка, даже если все вокруг думают, что он уже дедушка. С такими мыслями я готовил эксперимент для своей лекции по анализу. Я хотел продемонстрировать, что поверхность воды во вращающейся чаше принимает форму параболоида. Большая салатница с водой, водружённая на проигрыватель, отлично для этого подошла.

[1]Следующий мысленный эксперимент объяснит, почему этот закон верен. Давайте убедимся, что на боулинговый шар, лежащий на дне бассейна, действует сила Архимеда, равная весу вытесненной им воды. Представим, что мы заменили этот шар на шар из воды той же формы. Этот водяной шар останется неподвижным, так как предполагается, что вода в бассейне находится в покое. Мы заключаем, что сила тяжести водяного шара в точности уравновешивается силой Архимеда. То есть, по крайней мере для водяного шара, сила Архимеда равна весу вытесненной воды. Но эта сила зависит только от формы тела, а значит, будет такой же и для боулингового шара. Это и доказывает закон Архимеда.

Вкратце, закон сводится к двум наблюдениям: (1) неподвижная вода остаётся неподвижной, пока нет внешнего воздействия; (2) сила Архимеда, действующая на тело, зависит только от формы тела, а не от материала, из которого оно сделано.

Я подождал с минуту, чтобы вода стала вращаться вместе с салатницей, как единое целое со скоростью 33 оборота в минуту, и увидел гладкую, идеально параболическую поверхность.

Из любопытства я положил пробку на наклонную поверхность. Я ожидал, что пробка останется на склоне, было бы прикольно на это смотреть, а ещё лучше представить, что я сам плыву во вращающемся бассейне, как в парке аттракционов! Однако пробка повела себя неожиданно: она медленно поплыла вниз по поверхности и остановилась в самой нижней точке параболоида. «Возможно, это из-за сопротивления воздуха», — подумал я. Чтобы это проверить, я накрыл салатницу прозрачной плёнкой. Пробка плавала у самой стенки, я снова включил проигрыватель, и снова произошло то же самое! Значит, воздух здесь ни при чём — он входит во вращение быстрее воды. Точнее, затухание внутреннего движения в воздухе происходит быстрее, чем в воде, ведь вязкость воздуха выше, чем у воды, если её мерить с поправкой на плотность.[2]

Вопрос. Почему же пробка сползает вниз?

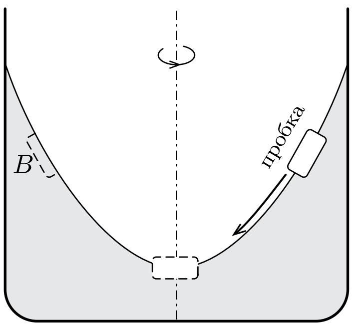


Рис. 3.1: Архимедовы силы для пробки (справа) и области B (слева) одинаковы. Но у пробки центробежная сила слабей, поскольку её центр тяжести ближе к оси. Это и заставляет её двигаться.

Объяснение. Давайте перейдём в систему отсчёта вращающейся салатницы. На рисунке 3.1 показана область воды B, ровно той же

[2]Такая относительная вязкость называется кинематической. Она определяется как отношение обычной (динамической) вязкости к плотности, что обычно записывается как $\nu = \mu/\rho$. Греческая буква ν читается как английское «new»; по словам Джо Келлера, обучавшего меня гидродинамике в аспирантуре, на приветствие «what's new?» (что нового?), теперь можно отвечать: «mu over rho» (мю на ро).

формы, что и вода, вытесненная пробкой. В нашей вращающейся системе область B находится в покое. Это означает, что центробежная сила[3] уравновешивает горизонтальную составляющую силы Архимеда.

Теперь представим, что область B начинает разбухать, превращаясь в пробку, при этом сохраняя ту же подводную форму. В этом процессе частицы в области B будут постепенно приближаться к оси вращения. Следовательно, её центробежная сила будет ослабевать, тогда как сила Архимеда останется прежней. Это несоответствие приводит к тому, что пробку начинает толкать в сторону оси.[4]

3.2 Пара рецептов

Параболические зеркала. Зеркала телескопов имеют форму параболоидов (параболоид — это поверхность, образуемая вращающейся параболой вокруг своей оси симметрии, см. рисунок 3.1). Параболоиды используют потому, что они собирают пучок лучей, идущих параллельно оси, в одну точку.[5] Среди всех поверхностей только параболоиды обладают этим фокусирующим свойством. При этом природа предоставила нам простой способ получить параболоид: форму параболоида принимает поверхность вращающейся жидкости, как на рисунке 3.1. Если расплавленному стеклу во вращающемся контейнере дать медленно остыть, то получится отличный параболоид — без всякой механической обработки. Природа работает одновременно и как аналоговый компьютер, и как токарный станок.

Съедобный параболоид. Налейте жидкий желатин в миску, поставьте её на проигрыватель и крутите, пока желатин не застынет. Его поверхность будет представлять собой аккуратный параболоид. Ваши друзья могут озадачиться (а возможно, и немного встревожиться), решив, что вы провели часы, кропотливо вырезая углубление такой невероятной гладкости. Позже можно будет их угостить, наполнив параболоид взбитыми сливками.

---

[3] Центробежная сила обсуждается в приложении на странице 158 — это фиктивная сила, возникающая из-за того, что система отсчёта не инерциальна.

[4] Попробуйте убедиться, что частицы области B обязаны (в среднем) приблизиться к оси. Для этого придётся воспользоваться двумя наблюдениями (1) вертикальная составляющая силы Архимеда области B уравновешивается весом воды в B и (2) то, что пробка однородна. Пробка со смещённым центром тяжести может плыть и к краю; см. раздел 3.5. — *Прим. ред.*

[5] По этой же причине тарелки микрофонов для подслушивания, спутниковые и другие антенны также имеют форму параболоидов. Датчик размещается в фокусе параболоида и собирает все «лучи», отражающиеся от антенны.

Кулинарное приложение теоремы Тейлора — Праудмена. А вот способ сделать интересные цветные узоры в желатине. Поставьте стакан с жидким желатином на проигрыватель, дайте ему несколько секунд, чтобы вращение стабилизировалось, и влейте туда столовую ложку или две желатина другого цвета. Эти две жидкости смешаются неожиданным образом: добавленный желатин сформирует завесу в виде свёрнутого рулона. Подождите, пока этот удивительный узор застынет. Попробуйте спросить своих друзей, как такое сделать (надеюсь, их у вас от этого не убавится). Возможно, это их озадачит, хотя, скорее всего, они догадаются, что дело не обошлось без вращения.

Это необычное перемешивание происходит из-за гироскопического эффекта в жидкостях, который описывается теоремой Тейлора — Праудмена. Грубо говоря, она утверждает, что быстро вращающаяся жидкость приобретает направленную жёсткость и ведёт себя, как будто состоит из зубочисток, параллельных оси вращения. Чем быстрее вращение (по сравнению с внутренним движением жидкости), тем больше эта жёсткость.

Этот эффект проявляется в движении атмосферы и океанов. Подробное обсуждение (интуитивно понятная часть которого не требует знания математического анализа) приводится в классической книге Дж. Бэтчелора [2].

3.3 Параболическая тарелка

Вообразите сосуд с водой, стоящий на плавно вращающейся платформе (см. рисунок 3.2). Поверхность воды принимает форму параболоида — как показано на рисунке. Если рассечь эту поверхность вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения, то получится парабола $y = kx^2$. Её крутизна определяется параметром k, который можно выразить через угловую скорость ω и ускорение свободного падения g:

$$k = \frac{\omega^2}{2g}. \tag{3.1}$$

На Луне, где $g_{\text{лун}} \approx g/6$, этот параболоид будет в шесть раз круче. А на Юпитере — раза в 2,5 более пологим. Если же увеличить скорость вращения с 33 до 78 оборотов в минуту — чуть больше, чем в два раза, — то k вырастет почти в шесть раз. Это позволит добиться того же результата, что на Луне, но дешевле.

Задача. Почему же вода выбирает именно форму параболоида?

Решение. Вот простое объяснение без использования матанализа: нужно знать только, что центробежная сила, действующая на материальную точку массой m, вращающуюся по окружности радиуса r,

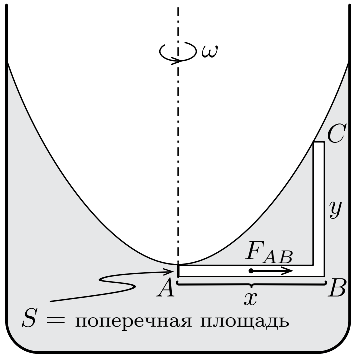


Рис. 3.2: Почему поверхность принимает параболическую форму?

равна:

$$m\omega^2 r, \tag{3.2}$$

всё это объясняется в приложении на странице 158.

Наша задача — найти глубину y при данном расстоянии x от оси вращения; рисунок 3.2.

Заметим, что центробежная сила, действующая на горизонтальный столбик воды AB, создаёт дополнительное давление в точке B. То же давление оказывает вертикальный столб воды BC. То есть:

$$p_{AB} = p_{BC}. \tag{3.3}$$

С одной стороны, давление p_{AB} в точке B равно центробежной силе F_{AB}, действующей на трубку AB, делённую на её поперечную площадь S: $p_{AB} = F_{AB}/S$. Центробежная сила равна $F_{AB} = m\omega^2 r$ (см. страницу 158). Здесь масса трубки: $m = \text{плотность} \cdot \text{объём} = \rho x S$, а расстояние от центра масс трубки до оси равно $r = \frac{x}{2}$. Значит

$$p_{AB} = \frac{F_{AB}}{S} = \frac{\rho x S \cdot \omega^2 \cdot x/2}{S} = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 x^2.$$

С другой стороны, давление от вертикального столба BC:

$$p_{BC} = \rho g y,$$

где y — глубина. Подставив всё это в уравнение (3.3), получим

$$\tfrac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 = \rho g y, \quad \text{или} \quad y = \frac{\omega^2 x^2}{2g},$$

что и требовалось.

Заметим, что плотность ρ сократилась, то есть на форму поверхности влияют только ω и g. Значит, при прочих равных, поверхности воды и ртути будут одинаковы. Ну и если вы решите сделать зеркало телескопа, вращая расплавленный материал, то о плотности можно не беспокоиться — одной заботой меньше.

3.4 Лодочка на водном склоне

Вопрос. Представьте себе снова воду, вращающуюся в чаше, как на рисунке 3.3. Лодочка на дистанционном управлении плавает по поверхности. Оператор хочет, чтобы лодочка оставалась в фиксированной точке относительно земли в стороне от центра, как показано на рисунке. По какой стрелке ему следует направить нос лодочки?

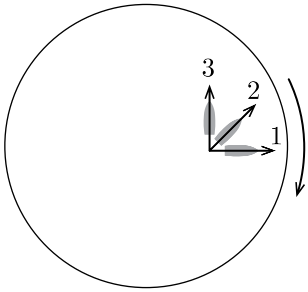


Рис. 3.3: Куда должна направляться лодочка во вращающейся воде, чтобы быть неподвижной относительно земли?

Ответ. Нос лодочки должен указывать в направлении 2. Действительно, лодочке необходимо иметь скорость, противоположную направлению потока, а также некоторую тягу от центра, чтобы не скатываться вниз по склону: центробежной силы, удерживающей лодочку на склоне, уже нет, ведь лодочка покоится относительно земли.

3.5 Без вёсел и парусов

Вопрос. Вы плывёте на лодке во вращающемся бассейне. Сможете ли вы управлять движением лодки без вёсел, гребного винта и парусов? Считайте, что сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Ответ. Чтобы двигаться к центру, следует *встать*. Заметим, что «вверх» во вращающейся системе отсчёта не то же, что «вверх» относительно земли: вставая, вам придётся придвинуться к оси.[6] Центробежная сила при этом уменьшается, и лодка может начать дрейфовать к оси. Чтобы двигаться от оси, надо лечь на дно лодки, максимально увеличив расстояние до оси, тем самым усилив дрейф к краю.

Вопрос. Моя плавучесть чуть выше нуля. Смогу ли я плавать во вращающемся бассейне?

Ответ. Может и нет. Ноги имеют большую плотность, чем грудная клетка, из-за воздуха в лёгких, поэтому я обычно держусь вертикально в воде (голова сверху). Теперь представьте себе, что я нахожусь ближе к краю вращающегося бассейна, где у поверхности воды крутой уклон. Если моё тело перпендикулярно поверхности, то оно лежит почти горизонтально. В этом положении мои ноги окажутся дальше от оси, и центробежная сила потянет их под воду[7]; если эта сила превзойдёт мою плавучесть, то я утону.

Однако есть пара способов спастись. Во-первых, можно попробовать держаться на воде так, чтобы ноги находились ближе к поверхности и были направлены вниз по склону. А ещё можно нырнуть, добраться до стенки бассейна, спуститься и ползти по дну к центру (стараясь двигаться ногами вперёд). В центре центробежная сила исчезнет, и можно будет всплыть.

3.6 Айсберг

Вопрос. Чувствуют ли айсберги вращение Земли? (Разумеется, на айсберги влияют течения и ветры, которые сами по себе зависят от вращения Земли, но я спрашиваю о прямом воздействии.)

Ответ. Вращение Земли создаёт силу, тянущую айсберги к экватору. Это уже объяснялось в задаче о плавающей пробке на странице 22, но я повторю рассуждение для айсберга.

Представьте, что айсберг ниоткуда не приплыл, а намёрз из воды, и теперь эта вода вытесняется. Замерзая и превращаясь в айсберг, вода расширяется, и часть айсберга поднимается над поверхностью.

[6] Будем считать, что вы высокого роста, но постарайтесь не перевернуться. — *Прим. ред.*

[7] Моя голова будет ближе к оси вращения, чем остальное тело — я буквально почувствую лёгкость в голове и тяжесть в ногах.

Это увеличивает среднее расстояние замёрзшей воды до оси Земли. Поскольку центробежная сила растёт с удалением от оси, айсберг испытывает бóльшую центробежную силу, направленную от оси, чем исходная вода. Эта сила и тянет айсберг к экватору, как показано на рисунке 3.4.

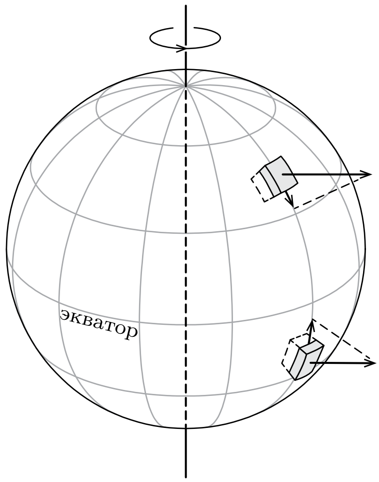


Рис. 3.4: Вращение Земли тянет айсберги к экватору.

А насколько эта сила велика? Грубая оценка, которой я не хочу вас утомлять (а может, и раздражать), показывает, что для десятикилометрового айсберга толщиной в 200 метров скорость устойчивого дрейфа, вызываемого этой силой, будет порядка 1 м/с: при этой скорости сопротивление воды уравновесит центробежную силу.

Метр в секунду — это скорость пешехода, и она не так уж мала, даже по сравнению со скоростью некоторых океанических течений. Но есть одно но: чтобы достичь этой скорости, начиная с нуля, потребуется примерно год — настолько мало ускорение. С другой стороны, некоторые айсберги не тают и год, и два, так что времени вполне достаточно. Действительно, если принять среднюю скорость за 0,5 м/с, то за 1 год $\approx 3{,}15 \cdot 10^7 \approx \pi \cdot 10^7$ секунд[8] мы проделаем расстояние порядка $(\pi/2) \cdot 10^7$ м, или около 15 000 км — примерно от полюса до экватора!

Это меня поразило. Разумеется, я пренебрегал гораздо более существенным влиянием ветров и течений, но центробежный эффект хоть и мал, но действует постоянно; а ветры и течения — сильны, но пере-

[8]Это забавное приближение 1 год $\approx \pi \cdot 10^7$ секунд я узнал от Тадаси Токиэды.

менчивы. Неясно (по крайней мере мне), приводит ли эта слабая сила к тому, что айсберги действительно дрейфуют в сторону экватора.[9]

[9] Чтобы разобраться в этом вопросе, нужно больше знать о течениях и ветрах. Теоретически можно представить, как течения, при которых слабый дрейф не оказывает существенного влияния, так и течения, при которых влияние дрейфа огромно. Если иметь данные о течениях и ветрах, то при некоторых естественных допущениях наш вопрос превращается в задачу из теории динамических систем. Компьютерный эксперимент может сильно помочь, особенно в случае течений, с которыми теоретические методы не справляются. Течения океанов, скорее всего, относятся к такому типу.

Глава 4

Плавание и дайвинг

4.1 Ванна на колесиках

Вот вариант задачи о шарике с гелием, но на Земле.

Вопрос. Лодочка плавает в ванной, установленной на колёсиках, способных без трения ездить по полу. В начале всё находится в состоянии покоя. С помощью пульта управления мы заставляем лодочку переместиться с одного конца ванны на другой и ждём, пока ванна и её содержимое снова не придут в состояние покоя. В какую сторону при этом сместилась ванна?

Будем считать, что m и M — массы лодочки и ванны соответственно, а L — длина ванны.

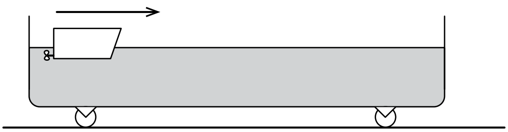


Рис. 4.1: Насколько сместится ванна после того, как лодочка проплывёт слева направо?

Следующий ответ —

$$\text{расстояние} = \frac{m}{m+M}L$$

— неверен. На самом деле ванна окажется там же, где была вначале.

Объяснение. По закону Архимеда, масса лодочки равна массе вытесненной ею воды. Поэтому перемещение лодочки эквивалентно перестановке двух равных масс. Но такая перестановка не сдвинет центр масс системы вода+лодка относительно ванны.

Центр масс всей системы также не может сдвинуться относительно пола, поскольку к ванне не приложены внешние силы. Следовательно, ванна не передвинется.

Вопрос. Круглое блюдо, наполненное водой, уравновешено на узкой опоре (рисунок 4.2a). Резиновая уточка плавает у края блюда. Вы медленно вытаскиваете уточку. В какую сторону опрокинется блюдо, если вообще опрокинется?

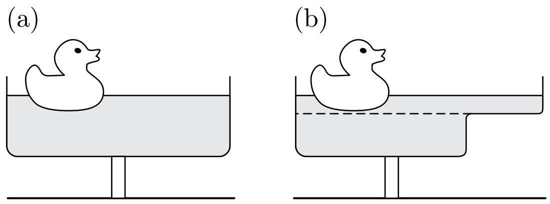


Рис. 4.2: Опрокинется ли блюдо, если осторожно вытащить уточку?

Ответ. Блюдо не опрокинется; оно останется в равновесии. Это видно из следующего мысленного эксперимента. Во-первых, по закону Архимеда, уточку можно заменить вытесненной ею водой — это не влияет на равновесие. Теперь вытаскивание уточки эквивалентно высасыванию этой области воды. Поскольку всё это делается медленно, вода успевает перераспределиться, и можно считать, что высасывается слой воды равной толщины, а это не нарушает равновесия.

Вопрос. Изменится ли ответ, если бы блюдо не было симметричным, как, например, на рисунке 4.2b?

Ответ. Равновесие может нарушиться. Например, если удалять воду выше пунктирной линии на рисунке 4.2b, то центр масс воды будет смещаться влево, соответственно и блюдо опрокинется влево.

4.2 Углублённая задача

Не начинайте эту задачу, не разобравшись с предыдущей.

Загадка. На рисунке 4.3 показана лодочка из предыдущей задачи, но теперь она подцеплена снизу натянутым тросиком, который прикреплён к колёсику, катящемуся по подводной рельсе, прикреплённой к ванне. Как и в предыдущей задаче, в начале всё покоится, далее лодочка плывёт к противоположному концу ванны, останавливается, и мы ждём некоторое время, пока ванна и её содержимое не придут в состояние покоя. Вопрос тот же: сдвинется ли ванна и если да, то в каком направлении?

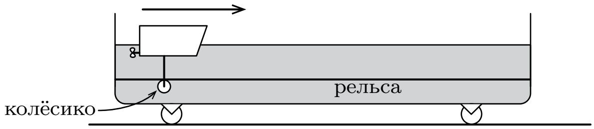


Рис. 4.3: В каком направлении сдвинется ванна, если тросик подтягивает лодочку вниз?

Кое-какие соображения. В предыдущей задаче, где тросик отсутствовал, мы установили, что ванна останется на месте. Но ведь вертикальная сила, создаваемая тросиком, не может повлиять на горизонтальное движение ванны и лодочки. Значит, ванна останется неподвижной, как и в предыдущей задаче.

Верно ли сказанное, а если нет, то где ошибка?

Теперь правильный ответ. Ванна сдвинется в том же направлении, что и лодочка. Объяснение аналогично задаче про шарик с гелием на странице 13 — по сути, это та же задача.

Поскольку тросик тянет лодочку вниз, масса вытесненной ею воды превышает массу самой лодочки, то есть лодочка вытесняет больший объём при той же массе — как и шарик с гелием в задаче на странице 13. То есть лёгкая лодочка поменялась местами с массивной водой. Значит, относительно ванны центр масс сместился влево. Но центр масс обязан оставаться неподвижным относительно земли, и, значит, сама ванна сместилась вправо.

Иными словами, раз центр масс движется влево относительно ванны, сама ванна обязана двигаться вправо, ведь импульс всей системы должен оставаться нулевым.

Вопрос. А где же обман в доказательстве, что ванна не сдвинется?

Ответ. Обман в заявлении, что тросик не влияет на горизонтальные силы, действующие на ванну. Когда лодочка движется, она передвигает воду, а вода взаимодействует со стенками ванны. Таким образом, вертикальное натяжение троса оказывает горизонтальное воздействие (хоть и непрямое).[1]

Отрицательные массы. Поскольку тросик тянет лодочку вниз, её масса меньше массы вытесненной ею воды. Поэтому можно думать, что вместо лодочки мы передвигаем в ванне отрицательную массу. Именно эта отрицательность и приводит к неожиданному результату.

4.3 Как сбросить вес за долю секунды

Загадка. Допустим, я стою на весах. Смогу ли я уменьшить их показания, не касаясь ничего вокруг и не снимая одежду?

Ответ. Вопрос с подвохом: сделать это можно, но лишь на короткое время. Для этого достаточно подогнуть колени. Если сделать это *очень* быстро, то мои ноги на какое-то мгновение оторвутся от опоры, и весы покажут нулевой вес. Если подгибать колени помедленней, то разница будет не столь заметной, но вес уменьшится. Вскоре придётся прекратить ускорение вниз и начать ускоряться вверх; показания весов увеличатся и вернутся к обычным, когда всё установится.

Всё это результат работы закона Ньютона:[2]

$$ma = F,$$

где a — ваше ускорение, а $F = S - W$ — равнодействующая внешних сил; здесь S — сила, с которой весы толкают меня вверх, а W — мой вес в покое. Весы всегда показывают значение S. Если я сгибаю колени, то ускоряюсь вниз: $a < 0$, и, следовательно,

$$ma = S - W < 0, \qquad \text{то есть,} \qquad S < W,$$

и показания весов меньше моего веса. Если я стою неподвижно, то $a = 0$ и $S - W = 0$, то есть весы показывают печальную правду. Ну а

[1] Представим себе, что теперь у нас появилась возможность дистанционно подтягивать и ослаблять тросик. Как мы только что выяснили, если перегонять лодочку вправо, то и ванна передвинется вправо. Далее расслабим тросик и перегоним лодочку влево. Согласно предыдущей задаче, ванна не сдвинется. Похоже, что можно повторять этот цикл, заставляя ванну двигаться всё дальше и дальше. Но тогда и центр масс ванны (с её содержимым) будет двигаться вправо — что-то не так. Где же ошибка? — *Прим. ред.*

[2] Объясняется в приложении на странице 142.

в начале прыжка $a > 0$ и $S - W > 0$; то есть весы показывают больше моего веса.

Следующая задача потребует математического анализа.

Задача. Докажите, что независимо от того, как я прыгаю на весах, среднее значение, которое они покажут, будет стремиться к моему истинному весу; будем считать, что я готов ждать долго.

Решение. Пусть T — время ожидания. Интегрируя уравнение $ma(t) = S(t) - W$, получаем

$$\int_0^T ma(t)\,dt = \int_0^T (S(t) - W)\,dt.$$

По формуле Ньютона — Лейбница (см. страницу 161),

$$\int_0^T a(t)\,dt = \int_0^T v'(t)\,dt = v(T) - v(0).$$

Значит

$$m\bigl(v(T) - v(0)\bigr) = \int_0^T S(t)\,dt - WT.$$

Поделив на T, получим

$$\frac{m}{T}\bigl(v(T) - v(0)\bigr) = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt}_{\text{среднее значение } S} - W.$$

Пусть $T \to \infty$ (будем считать, что я живу вечно), тогда левая часть стремится к нулю, так как v ограничена в силу ограниченности человеческих возможностей. Следовательно, и правая часть тоже стремится к нулю, то есть среднее значение

$$\frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt$$

стремится к W, что и требовалось доказать.

4.4 Шарик под водой

Вопрос. Шарик, надутый воздухом, удерживается под водой нитью, привязанной ко дну банки, а сама банка стоит на весах. Что произойдёт с показаниями весов сразу после того, как нить разорвётся?

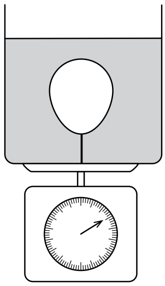


Рис. 4.4: Что произойдёт с показаниями весов (увеличатся, уменьшатся или не изменятся) сразу после разрыва нити?

Верно или нет? До разрыва нить тянула дно банки вверх. После разрыва эта сила исчезла, значит, банка стала как бы тяжелее. Поэтому сразу после разрыва весы покажут больший вес.

А теперь правда. На самом деле всё наоборот: весы вначале покажут *меньший вес*, то есть банка покажется легче. Чтобы это понять, проследим за центром масс всей системы (банки с её содержимым). Как только нить рвётся, шарик ускоряется вверх, но одновременно тот же объём воды ускоряется вниз. Поскольку вода значительно плотнее воздуха, центр масс содержимого банки ускоряется вниз. А это и означает, что сила, действующая на весы, уменьшается — так же, как в предыдущей задаче, где я подгибал колени, уменьшая этим показания весов.

Более формально, по второму закону Ньютона (страница 142), ускорение a центра масс определяется всеми действующими силам; их всего две — реакция опоры (весов) и сам вес. То есть

$$\text{реакция} - \text{вес} = ma.$$

Когда нить рвётся, начальное ускорение направлено вниз, то есть $a < 0$; это означает, что

$$\text{реакция} - \text{вес} < 0 \qquad \text{или} \qquad \text{реакция} < \text{вес},$$

то есть сила реакции опоры (а её и показывают весы) меньше самого веса.

Где же была ошибка? В предыдущем рассуждении я сказал правду, но не всю. Не была упомянута сила *воды*, действующая на банку. Действительно, в момент разрыва нити вода начинает опускаться, из-за чего давление на дно банки уменьшается, и банка кажется легче. Хоть разрыв нити и делает банку тяжелее, но в то же самое время банка становится и легче за счёт уменьшения давления на дно. Как показывает рассуждение с центром масс, облегчение побеждает утяжеление.

Мораль. Эта задача подтверждает, что внешность обманчива. Шар хорошо виден, но лёгок. Вода же гораздо массивнее и, следовательно, куда важнее, но её легко упустить из вида (может, потому что она прозрачная). Я думал о видимом, но несущественном, и упустил существенное, но невидимое. В физике, как и в жизни, пустышки кажутся важнее, чем того заслуживают.

4.5 Аквалангист в цистерне

Вопрос. Аквалангист со слегка положительной плавучестью плавает на глубине большой прямоугольной цистерны; ему приходится работать ластами, чтобы не всплыть. Рядом с этой цистерной стоит такая же, заполненная водой до того же уровня, но без аквалангиста.[3] Какая из цистерн тяжелее?

Парадокс. Вот пара противоречащих друг другу рассуждений:

(A): С одной стороны, первая цистерна явно легче, поскольку объём её содержимого совпадает с объёмом содержимого второй цистерны, а плотность аквалангиста меньше плотности воды.

(B): С другой стороны, так как глубина воды в цистернах одинакова, давление воды на их дно также одинаково. Значит, цистерны и весят одинаково.

Где же ошибка?

Ответ. Верно рассуждение (A) — против алгебры не попрёшь. Остаётся найти ошибку в (B). Аквалангист должен работать ластами, чтобы оставаться под водой. В движущейся воде давление не обязано совпадать с давлением покоящейся воды на той же глубине. Более

[3]Иными словами, объём воды вместе с аквалангистом в первой цистерне равен объёму воды во второй.

того, само понятие глубины плохо определено, ведь поверхность воды не вполне плоская. Когда аквалангист работает ластами, он направляет воду вверх, чтобы удержаться под водой, и над ним образуется небольшой водяной холм. Из рассуждения (A) видно, что среднее давление воды на дно цистерны с аквалангистом меньше, чем в другой цистерне.

А следующая задача предлагается читателю:

Задача. Вертолёт завис над водой. Поток воздуха от его лопастей создаёт на поверхности воды небольшое углубление. Выполняется ли для него закон Архимеда? Иначе говоря, равен ли вес вертолёта приблизительно весу вытесненной воды? Будем считать, что движение воздуха и поверхность воды установились.

4.6 Проблема с весом

Два сосуда на рисунке 4.5 наполнены водой до одного уровня. Днища обоих имеют одинаковую форму и размер.

Вопрос. Верно ли, что сила давления воды на дно в левом сосуде больше, чем в правом?

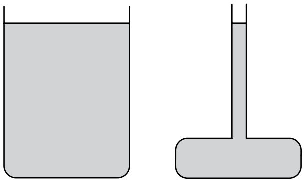


Рис. 4.5: Верно ли, что вода в левом сосуде действует на дно с большей силой?

Ответ. Нет, неверно: на оба дна действует одинаковая сила. Причина в том, что давление (то есть сила, приходящаяся на единицу площади) зависит только от глубины и не зависит от формы сосуда: будь то кружка или озеро, давление на одной и той же глубине одинаково! Поскольку днища обоих сосудов находятся на одной глубине, давления там равны. А поскольку площадь дна та же, то и силы, действующие на них, равны.

Вопрос. А что не так вот с таким рассуждением: «Поскольку вода в правом сосуде весит меньше, она давит на дно с меньшей силой»?

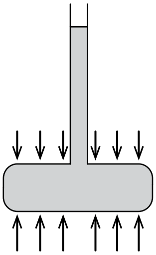


Рис. 4.6: Сила, с которой вода действует на дно, зависит только от площади дна и глубины, но не от веса воды.

Ответ. На рисунке 4.6 показано, что дно сосуда с горлышком испытывает силу, бóльшую, чем вес самой воды. Эта избыточная сила равна силе, направленной вниз, от свода сосуда. Действительно, согласно первому закону Ньютона, силы, действующие на воду, находятся в равновесии: силы, направленные вниз, уравновешивают силу, направленную вверх:

$$\text{вес} + \text{сила вниз} = \text{сила вверх}, \quad \text{так что} \quad \text{вес} < \text{сила вверх}.$$

Итак, вес воды меньше, чем сила, с которой дно действует на воду снизу. Независимо от того, узкое горлышко или широкое, давление будет тем же.

Глава 5

Потоки и струи

5.1 Шприц и закон Бернулли

Вопрос. Представим, что вы брызгаетесь водой из шприца, нажимая на поршень. Вспомните о первом законе Ньютона (движение сохраняется равномерным, если на тело не действуют силы) и ответьте, надо ли прикладывать какое-то усилие, чтобы перемещать поршень с постоянной скоростью при условии, что поршень скользит без трения, а вода имеет нулевую вязкость[1]? Другими словами, что случится, если я толкну поршень, сообщив ему некоторую скорость, и отпущу: будет ли он продолжать двигаться с той же скоростью по инерции?

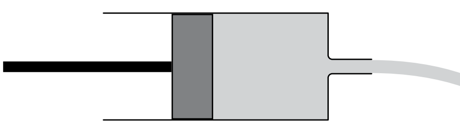


Рис. 5.1: Будет ли поршень двигаться равномерно по инерции при отсутствии вязкости и трения?

Ответ. Чтобы двигать поршень с постоянной скоростью, придётся применить силу, даже в идеальном мире без трения и вязкости. Первый закон Ньютона о равномерном движении по инерции здесь неприменим, так как *некоторая часть воды ускоряется*. Ускорение происходит при подходе воды к выходу из шприца; см. рисунок 5.2.

[1] Вязкость жидкости — это, грубо говоря, её внутреннее трение: выдавливать из трубки мёд труднее, чем воду, потому что вязкость мёда выше. Идеальная жидкость имеет нулевую вязкость, и здесь мы пренебрегаем вязкостью воды.

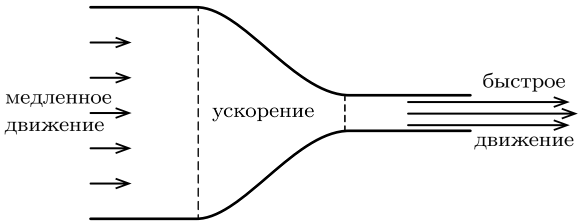


Рис. 5.2: Часть воды должна ускоряться, и для этого необходима разница давлений.

Причина в том, что частицы жидкости подталкиваются сзади, то есть давление сзади частицы выше, чем спереди.

В этом и состоит *закон Бернулли*, который обычно формулируется как «чем ниже давление, тем выше скорость». Из-за этого может показаться, что именно рост скорости приводит к падению давления, но на самом деле всё наоборот: «жидкость ускоряется в направлении понижения давления». В частности, если давление вдоль потока понижается, то повышается скорость. Мы одновременно сформулировали закон Бернулли и объяснили его. Таким образом, закон Бернулли — это частный случай второго закона Ньютона.

Закон Бернулли напоминает следующую закономерность: чем меньше высота (а значит, и потенциальная энергия) падающего камня, тем быстрее его скорость. Более того, закон Бернулли можно рассматривать как частный случай закона сохранения энергии.[2]

Задача. Какую силу нужно приложить, чтобы двигать поршень с постоянной скоростью v? Площадь поршня равна A, а площадь выходного отверстия — a.

Решение. Когда мы прикладываем силу F, чтобы переместить поршень на расстояние D, мы совершаем работу $W = FD$. Вся эта работа тратится на увеличение кинетической энергии воды (ведь мы предположили отсутствие трения и вязкости):

$$F \cdot D = \frac{mv_{\text{вых}}^2}{2} - \frac{mv^2}{2}, \tag{5.1}$$

[2]Эта связь станет очевидней, если всё же записать закон Бернулли формулой:

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{const},$$

здесь v — скорость устоявшегося потока несжимаемой жидкости, ρ — плотность, а p — давление в той же точке; силой тяжести пренебрегли. — *Прим. ред.*

где m — масса вытесненной воды. Остаётся выразить F через v, a и A. Сначала заметим, что $m = \rho AD$, где ρ — плотность воды.

Кроме того, так как вода несжимаема, объём, вытесняемый поршнем в секунду (vA), равен выходящему объёму:

$$vA = v_{\text{вых}}a \qquad \text{или} \qquad v_{\text{вых}} = \frac{A}{a}v.$$

(Наверное, это и сразу было понятно.) Подставляя всё это в (5.1), получаем

$$F = \frac{1}{2}\rho A v^2 \left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right]. \tag{5.2}$$

Давайте обсудим пару интересных следствий этой формулы при разных отношениях площадей A/a и фиксированной скорости поршня v.

1. Предположим, что выходное отверстие узкое, то есть отношение A/a велико. Тогда, согласно (5.2), требуемая сила F также велика. Проталкивать воду через узкое отверстие трудно, но не из-за вязкости, как можно было бы подумать, а из-за того, что надо постоянно ускорять частицы. Совершаемая нами работа идёт не в тепло (кинетическую энергию хаотического движения), а в кинетическую энергию упорядоченного движения выбрасываемой воды.

2. Теперь предположим, что трубка расширяется, а не сужается; то есть $A/a < 1$, как на рисунке 5.3. Тогда, согласно (5.2), сила F отрицательна. Это означает, что для поддержания постоянной скорости поршень придётся придерживать! Опять же, это можно увидеть и без формулы, ведь вода выходит с меньшей скоро-

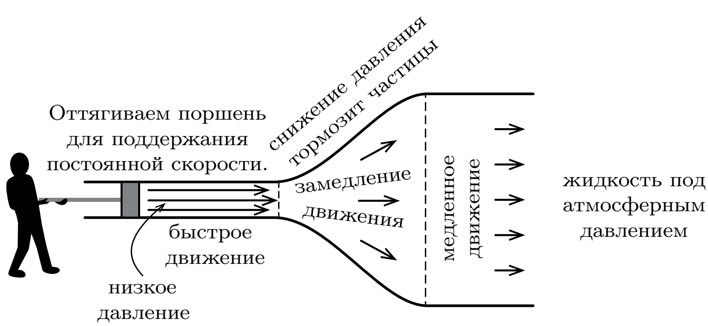


Рис. 5.3: Поддержание постоянной скорости в расширяющейся трубке требует придерживания (торможения) поршня.

стью, чем скорость внутри цилиндра. Это значит, что придётся замедлять движение воды, то есть придерживать поршень.

5.2 Коктейльная трубочка и необратимость времени

Вопрос. Требуется ли больше усилий, чтобы втянуть или выдуть воду из коктейльной трубочки (см. рисунок 5.4)? Предполагается, что вода в трубочке движется с постоянной скоростью и что сила тяжести, как и вязкость, не играют заметной роли.

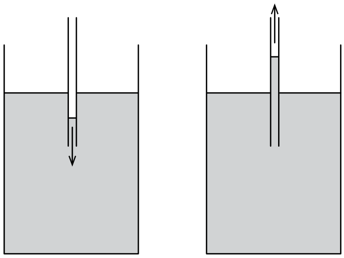


Рис. 5.4: Одинаковые ли усилия нужны, чтобы поддерживать скорость постоянной?

Ответ. Втягивать трудней; причина объясняется на рисунке 5.5. При всасывании вода поступает в трубочку со всех направлений, как на части (b) рисунка. В среднем, частицы воды заметно увеличивают скорость, подходя к отверстию. Это ускорение как раз и обеспечивается всасыванием.[3] Иными словами, мы должны затратить энергию на разгон жидкости, а это требует усилий.

С другой стороны, как показано на рисунке 5.5a, вытекающая вода образует струю. Поскольку струя расширяется медленно, давление тоже меняется медленно вдоль потока.

Направление времени. Можно подумать, что, изменив направление потока в трубочке, мы просто изменим направление движения воды повсюду; однако с детства мы знаем, что всё не так. Задуть свечу легко, а погасить её, втягивая воздух (с безопасного расстояния, не обжигая губ), невозможно. Я был бы рад услышать подробности от тех, кому это удалось (но не от их адвокатов).

[3]Тот самый эффект Бернулли со страницы 41.

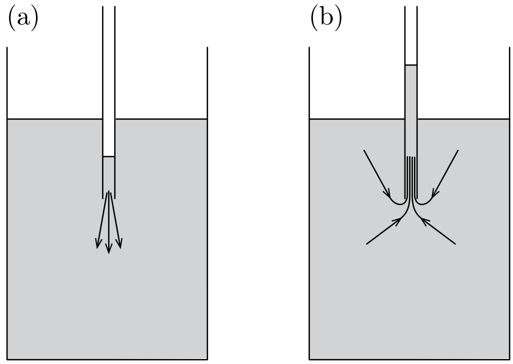


Рис. 5.5: Что трудней, всасывать или выдувать воду (поддерживая скорость постоянной)?

Вопрос предпочтительного направления времени много лет занимал учёных. Его суть в следующем кажущемся противоречии. В классической механике законы Ньютона обратимы во времени. И всё же, если рассматривать систему с большим числом классических частиц, например идеальный газ, то кажется, что обратимость времени исчезает. Разрешение этого противоречия состоит в том, что ситуация, показанная на рисунке 5.6 (та же, что на рисунке 5.5a, но с обращённым временем), хоть и возможна теоретически, но крайне неустойчива. Даже если искусственно заставить жидкость двигаться как на

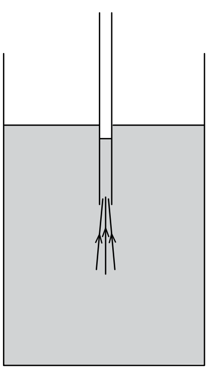


Рис. 5.6: Поток, начинающийся как входящая струя, нестабилен и через мгновение начнёт выглядеть так, как на рисунке 5.5.

рисунке 5.6, то через мгновение всё сломается и жидкость начнёт двигаться как на рисунке 5.5b.

5.3 Как двигаться в космическом корабле

Вопрос. Представьте, что вы зависли посредине кабины космического корабля. Немного отдохнув, вы решили добраться до стены. Можно было бы чего-нибудь бросить (например, ботинок или ремень[4]) и начать движение в противоположную сторону, но предположим, что кидаться предметами запрещено. Как в этом случае добраться до стены?

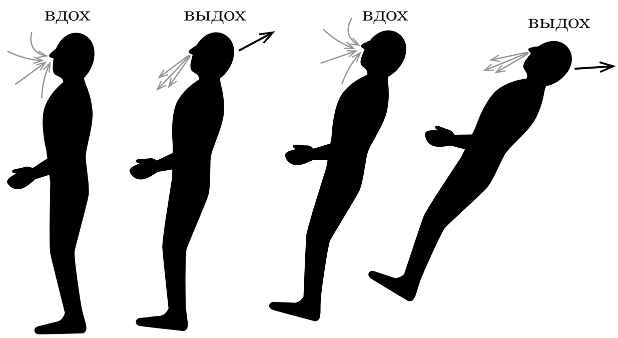


Рис. 5.7: Движение в невесомости за счёт дыхания.

Ответ. Просто дышите. При вдохе вы втягиваете воздух со всех сторон, а при выдохе он выходит струёй, как показано на рисунке 5.7. В итоге за каждый цикл вдох-выдох выбрасывается воздух в направлении этой струи. Это заставит вас двигаться в противоположную сторону. Вы начнёте передвигаться, как крайне малоэффективный кальмар.[5] Если дышать ртом, то движение будет медленнее (что неудивительно), ведь воздух выталкивается через рот с меньшей скоростью, чем через нос.

5.4 О садовой поливалке

Вопрос. Садовая поливалка состоит из S-образной трубки, вращающейся вокруг точки P, как показано на рисунке 5.8. Вода подаётся

[4]Они ведь не нужны в невесомости — ходить негде, и штаны не спадают.

[5]Кальмары движутся по тому же принципу, только выбрасывают воду сзади.

через шланг, и сила струи заставляет поливалку вращаться. В каком направлении будет вылетать вода относительно наблюдателя на земле? Считайте, что вращение происходит без трения и с постоянной скоростью.

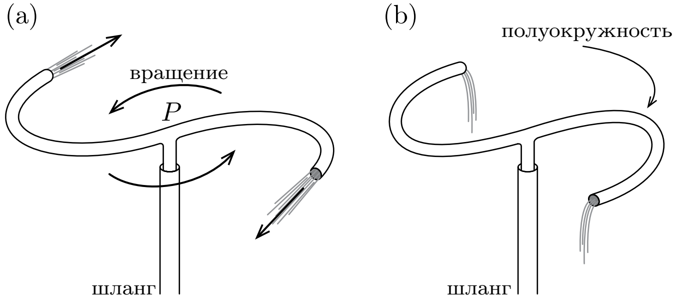


Рис. 5.8: В каком направлении струя выходит из трубки?

Ответ. Вода будет выходить в радиальном направлении, то есть прямо от точки P; направление, показанное на рисунке 5.8a, неверно! Вращательная составляющая скорости воды равна нулю, как на рисунке 5.9.[6]

Объяснение. Вода, подаваемая через шланг, не вращается вокруг вертикальной оси. Единственное, что могло бы заставить её вращаться, — это трение в шарнире, но по условию оно отсутствует. Поэтому вода выходит с тем же нулевым вращением, с которым вошла. То есть ей придётся вылетать в строго радиальном направлении.[7]

Ещё вопрос. А что, если переделать поливалку, придав каждому плечу форму полуокружности, как показано на рисунке 5.8b? Сработает ли эта идея?

Ответ. Идея любопытна, но такая поливалка непригодна для полива. Вода будет выходить с нулевой скоростью относительно земли, то есть литься вертикально вниз! Действительно, как уже установлено, вода обязана выходить в радиальном направлении. Но радиальная составляющая скорости на выходе должна быть равна нулю, потому

[6] На рисунке верно показано направление движения воды, однако сама струя будет спиралевидной из-за вращения поливалки. — *Прим. ред.*

[7] Чтобы сделать это рассуждение совсем точным, достаточно заменить расплывчатый термин *вращение* на точный термин *момент импульса* и сказать, что момент импульса не меняется из-за отсутствия момента силы.

что плечо имеет форму полуокружности. (Действительно, радиальная составляющая этой скорости та же, что в системе отсчёта, крутящейся вместе с поливалкой. А в этой системе струя воды должна быть направлена по касательной к трубке, то есть перпендикулярно направлению к P; то есть у скорости нулевая радиальная составляющая.) Получится довольно странное приспособление: вода входит в него с положительной скоростью, а выходит с нулевой.

Вопрос. Итак, в нашу странную поливалку вода втекает с положительной кинетической энергией, а вытекает с нулевой скоростью и, следовательно, с нулевой кинетической энергией. Куда же девается энергия?

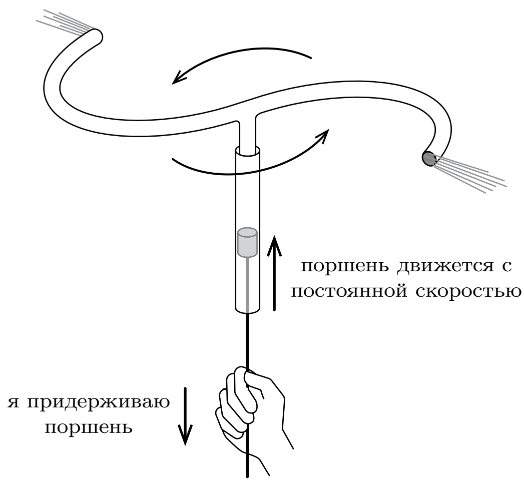


Рис. 5.9: Если поршень движется вверх, то его надо придерживать, чтобы скорость оставалась постоянной.

Ответ. Энергию высасывает поливалка — это не фигура речи, а объяснение физического процесса. Поливалка сосёт в самом прямом смысле — давление в шланге отрицательно[8] (рисунок 5.9). Это происходит потому, что вода во вращающейся трубе выбрасывается наружу центробежным эффектом, создавая сосущий эффект.

Водяной кнут. Что же будет с поливалкой, если поршень на рисунке 5.9 не удерживать?

[8]Точнее, оно ниже атмосферного давления.

Вращающиеся плечи создают центробежную тягу, которая ускоряет движение воды. Поливалка начнёт вращаться быстрее и быстрее, пока вся вода не выльется.[9] Как ни странно, это похоже на щелчок кнута. Если послать волну вдоль кнута, то, приближаясь к кончику, длина волны укорачивается[10], и та же энергия концентрируется в очень короткой волне у конца. При правильном движении концентрация энергии может достичь того, что кончик кнута превысит скорость звука. Похожая, хоть и менее впечатляющая, концентрация энергии происходит и в нашем мысленном эксперименте с поливалкой.

5.5 Быстрый слив с нулевой скоростью

Вопрос. На рисунке 5.10 показан бак с присоединённым резиновым шлангом. Можно ли сливать воду из шланга так, чтобы она вытекала с нулевой скоростью?[11]

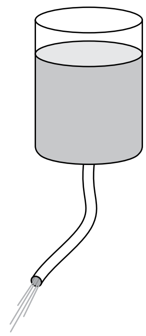


Рис. 5.10: Можно ли сливать воду из бака так, чтобы вода при выходе из шланга имела (почти) нулевую скорость?

Ответ. Надо просто двигать конец шланга со скоростью, противоположной скорости выходящей воды; тогда вода будет выходить с нулевой скоростью. Это то же, что бросить яблоко назад из движущегося автомобиля со скоростью, равной скорости автомобиля. В момент броска яблоко имеет нулевую скорость относительно земли.

Если взять нашу странную поливалку, показанную на рисунке 5.8b, и подсоединить её к баку, то она сможет сливать воду с нулевой

[9] Попробуйте разобраться, не следует ли из этого наблюдения существование вечного двигателя. — *Прим. ред.*

[10] Так как толщина кнута уменьшается от начала к концу. — *Прим. ред.*

[11] Скорость измеряется относительно земли.

скоростью. Более того, эта поливалка идеально подходит для опорожнения бака. Она позволяет быстро сливать жидкость из одного бака в другой, без брызг и без насоса, ведь поливалка сама высасывает воду (как объясняется на странице 47) и работает как насос!

5.6 Загадка о замёрзшей струе

Следующий вопрос пришёл ко мне в голову, пока я мыл посуду и наблюдал, как струя воды из крана ударяется о дно раковины.

Вопрос. Вода равномерно льётся из банки на плоскую платформу весов и разлетается в стороны, как показано на рисунке 5.11. Показания весов измеряют силу удара струи. Что больше: сила удара струи или вес падающей струи? Или же они примерно равны? Будем игно-

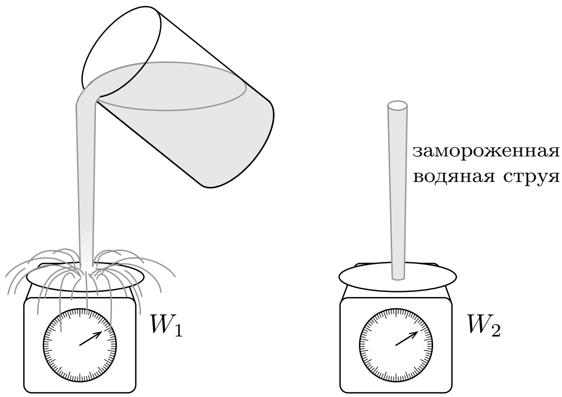


Рис. 5.11: Как соотносится сила удара падающей воды с её весом?

рировать сопротивление воздуха, поверхностное натяжение и другие незначительные эффекты. Вертикальной скоростью воды у горлышка и внутри банки следует пренебречь.

Ответ. В каждый момент времени о платформу бьётся лишь небольшая часть воды. Это может навести на мысль, что сила удара меньше веса всей струи, но на самом деле эти силы примерно равны.

Неформальное объяснение. Импульс[12] всей воды не меняется, пока струя льётся равномерно. Действительно, у струи импульс не меняется, так как сама струя не меняется в процессе течения, а импульс остальной воды равен нулю.

Как объяснялось в конце раздела А.4, импульс не меняется, когда равнодействующая сил на воду равна нулю:

$$W - R = 0,$$

где W — вес воды, а R — сумма реакций со стороны банки, весов и нулевого уровня. Соотношение $W = R$ даёт

$$W_{\text{банка}} + W_{\text{струя}} + W_{\text{ноль}} = R_{\text{банка}} + R_{\text{весы}} + R_{\text{ноль}}. \tag{5.3}$$

Но $W_{\text{банка}} = R_{\text{банка}}$ и $W_{\text{ноль}} = R_{\text{ноль}}$, ведь можно считать, что вода в банке и на нулевом уровне находится в покое. Выбросив эти слагаемые из (5.3), получаем:

$$W_{\text{струя}} = R_{\text{весы}},$$

что и требовалось.

5.7 Загадка о завихрении

Краткая справка. Для этой задачи нам потребуется следующее утверждение; оно будет расшифровано чуть ниже:

> *Зави́хренность невязкой жидкости остаётся нулевой, если она была нулевой изначально.*

Это частный случай теоремы Кельвина.[13]

Что такое зави́хренность? Название подсказывает, что завихренность[14] должна мерить вращение жидкости. Я объясню, как это делается для двумерных жидкостей. Представим, что в какой-то момент я впрыснул в жидкость краситель, нарисовав на ней плюс из двух

---

[12] Импульс объясняется в приложении, на странице 150, здесь говорится об импульсе в вертикальном направлении.

[13] Формулировку и доказательство этой теоремы можно найти, например, в учебнике Бэтчелора. Отмечу, что для двумерных жидкостей есть более наглядное доказательство, которое почти сразу вытекает из следующих двух утверждений: (1) из-за отсутствия вязкости на круглую область жидкости действует нулевой момент силы (относительно центра области) и (2) площадь области не меняется при переносе вдоль потока (при этом область не обязана оставаться круглой; предполагается лишь, что в какой-то момент она круглой была).

[14] Ударение на первый слог. — *Прим. ред.*

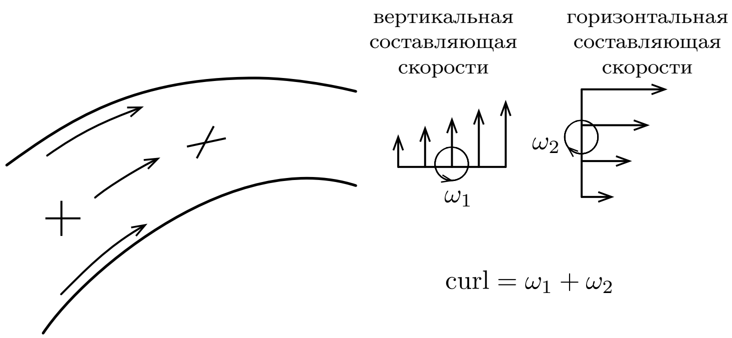


Рис. 5.12: Завихренность жидкости есть сумма угловых скоростей двух бесконечно малых штрихов, сходящихся в данной точке, в тот момент, когда они перпендикулярны друг другу.

коротких перпендикулярных штрихов, см. рисунок 5.12. Эти штрихи будут поворачиваться по мере переноса потоком (они также будут растягиваться, но это нас не интересует); давайте измерим их угловые скорости ω_1 и ω_2 в начальный момент, когда они были перпендикулярны. Тогда завихренность жидкости в точке p равна сумме $\omega_1 + \omega_2$. Если бы жидкость вращалась как твёрдое тело, то её завихренность равнялась бы удвоенной угловой скорости вращения.

Загадка о развороте жидкости. На рисунке 5.13 показана идеальная жидкость, заполняющая кольцо с поршнем внутри. Всё находится в покое. Затем мы проталкиваем поршень на полный оборот

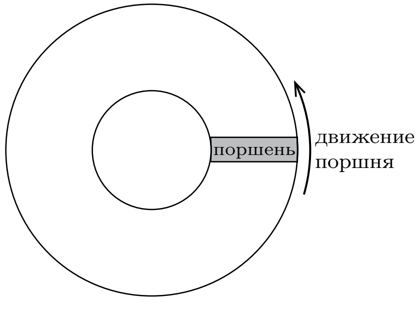


Рис. 5.13: Как может жидкость вращаться, сохраняя нулевую угловую скорость (точнее, зави́хренность)?

внутри кольца. Согласно теореме Кельвина, в течение всего процесса завихренность оставалась нулевой. Но ведь вся вода при этом разворачивается, разве такое возможно!?

Решение. Когда поршень движется против часовой стрелки, вода не перемещается как твёрдое тело; если бы это было так, то завихренность действительно была бы ненулевой. Чтобы сохранять нулевую завихренность, воде приходится двигаться быстрее у внутренней стенки, чем у внешней, как показано на рисунке 5.14a. Жидкость одновременно совершает два движения: (1) вращение против часовой стрелки вместе с поршнем и (2) циркуляция по часовой стрелке. В системе отсчёта, вращающейся вместе с поршнем, течение выглядит как на рисунке 5.14b.

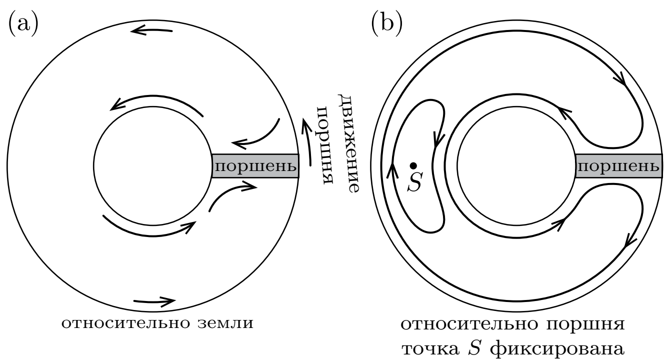


Рис. 5.14: (a) Относительно земли поток быстрее на внутренней стороне. (b) Поток в системе отсчёта, вращающейся вместе с поршнем.

Вопрос. Есть ли в жидкости точка, которая возвращается на место после одного оборота поршня?

Ответ. Точка S, расположенная на отрезке[15], диаметрально противоположном поршню, возвращается в исходное положение. Более того, эта точка остаётся неподвижной относительно поршня на протяжении всего оборота. [16]

[15] Чтобы понять, где именно расположена точка S, надо знать, что поток происходит вдоль линий уровня решения уравнения Лапласа $\Delta u = 1$ с нулевыми значениями на границе области, занятой водой. В частности, каждый экстремум u остаётся неподвижным относительно поршня. — *Прим. ред.*

[16] Существование такой точки следует из теоремы Боля — Брауэра о неподвижной точке, формулировку и доказательство которой можно найти в любом учебнике топологии, например, в книге Дж. Манкреса [17].

5.8 Вопрос о струйном принтере

Струйные принтеры работают, выбрасывая тонкие струи чернил на бумагу.

Вопрос. Вода (или чернила) выпрыскиваются из тонкой трубки. Из-за поверхностного натяжения струя распадается на капли (рисунок 5.15).[17] Летят ли капли с той же скоростью v, с которой вода выходит из трубки? Силой тяжести и сопротивлением воздуха следует пренебречь.

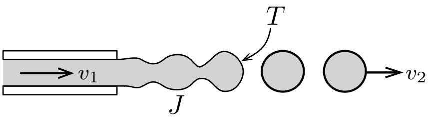


Рис. 5.15: Будут ли капли продолжать лететь с той же скоростью, с какой вылетает струя? Сопротивлением воздуха следует пренебречь.

Ответ. Капли движутся медленнее, чем струя в трубке. Поверхностное натяжение заставляет струю J стягиваться подобно резиновой нити. Это натяжение тянет кончик T влево, к выходу из трубки, замедляя движение. Затем кончик T отрывается и превращается в каплю, которая уже движется медленнее чернил в трубке.

5.9 Загадка о водопаде

Вопрос. Рассмотрим горизонтальную трубу на рисунке 5.16. Из трубы вытекает вода: слой A, выйдя из трубы, начинает падать, а слой B, всё ещё находящийся в трубе, пока ещё не падает. То есть наш поток сдвигается вниз и, значит, завихривается по часовой стрелке. Значит, по выходе из трубы вода приобретает ненулевую завихренность. Но, как мы знаем, это противоречит теореме Кельвина (сформулированной выше), согласно которой завихренность меняться не может.

Где ошибка рассуждения?

Ответ. Ошибка в том, что слой A был нарисован неверно. На самом деле слои не остаются вертикальными, а наклоняются, как показано на рисунке 5.16b. Этот наклон и компенсирует вращение в моём исходном рассуждении.

[17] Этот процесс обсуждается в статье Йенса Эггерса [4]. — *Прим. ред.*

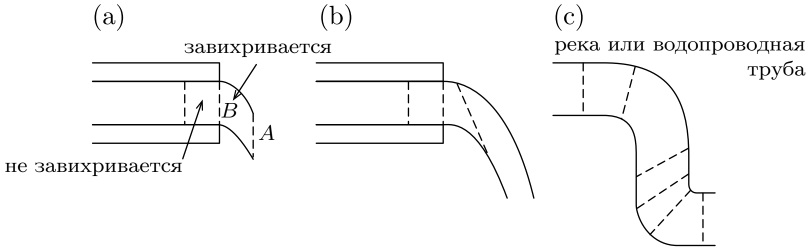


Рис. 5.16: Слои воды начинают опускаться, по выходе из трубы, приобретая завихренность — или всё же нет? Изображение очень схематично — слои вовсе не остаются прямыми.

Поток в трубе. Подобное противовращение наблюдается в воде, проходящей через изгиб трубы или реки. На рисунке 5.16c показано, как линия красителя движется по изогнутой трубе. Когда труба поворачивает направо, линия поворачивается влево так, чтобы сохранить нулевую завихренность. На втором изгибе трубы происходит обратное: труба поворачивает налево, линия — направо.

Глава 6

Велосипеды, гимнасты и ракеты

6.1 Как качаться на качелях?

Вопрос. Иногда сказать легче, чем сделать. Но бывает, что легче сделать, чем сказать. Обычные качели — хороший тому пример. Попробуйте объяснить, как ребёнок использует энергию своих мышц при раскачивании на качелях. Ответ совсем непростой.[1]

Ответ (анатомия резонанса). Когда вы качаетесь на качелях, наибольшая перегрузка ощущается в самой нижней точке, а наименьшая — в верхних (крайних) точках траектории.[2] Теперь вообразим, что у вас в руках груз. Внизу траектории вы поднимаете его к плечам, держите до самой верхней точки, а там быстро опускаете на колени. Далее всё повторяется: внизу поднимаем, наверху опускаем и так далее.

Давайте поймём, почему эти действия будут раскачивать качели. Заметим, что вы поднимаете груз, когда он тяжелей, а опускаете, когда он легче. Таким образом, суммарно вы совершаете положительную работу, которая и идёт на раскачивание.

Конечно, вовсе не обязательно держать в руках груз: можно использовать голову (в самом прямом смысле), торс или ноги. Именно

[1]Однажды внук спросил деда: «Ты спишь с бородой над или под одеялом?» — после этого дед не мог заснуть, клал бороду и так, и эдак; оба варианта оказались неудобными.

[2]Меньшая перегрузка в верхней точке обусловлена сразу двумя причинами: (1) центробежная сила меньше и (2) проекция силы тяжести тоже меньше.

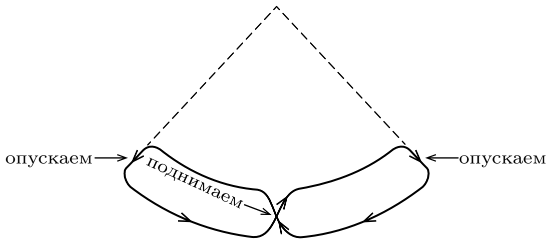


Рис. 6.1: Движение центра масс, раскачивающее качели.

это и делают дети: внизу они выпрямляют колени и спину (поднимая вес), а наверху сгибают колени и откидываются назад (опуская вес).

Ребёнком я всё это делал, но объяснить не мог. Теперь — наоборот.

6.2 Почему дорожает энергия?

Вопрос. Камень падает с постоянным ускорением (сопротивлением воздуха пренебрегаем). На рисунке 6.2 показана скорость после каждого пройденного метра. Почему прирост скорости уменьшается с каждым следующим метром?

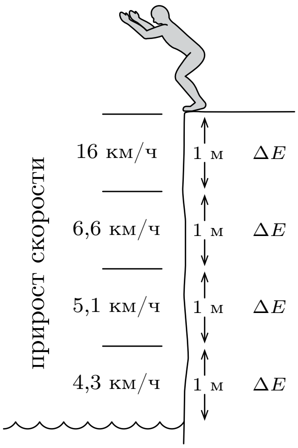


Рис. 6.2: Чем ниже падает ныряльщик, тем меньше прирост его скорости на каждый пройденный метр.

Ответ. По мере того как камень ускоряется, он тратит всё меньше времени на прохождение каждого следующего метра и, соответственно, имеет всё меньше времени, чтобы увеличить скорость.

Вот более строгое объяснение. Если камень падает с высоты h, то вначале его потенциальная энергия[3] равна mgh. Мы считаем, что вначале его скорость была нулевой, а значит, и кинетическая энергия равнялась нулю. Значит, непосредственно перед ударом о землю вся энергия становится кинетической: $\frac{mv^2}{2}$. Приравняв эти два выражения и сократив m, получим

$$v^2 = 2gh \qquad \text{или} \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

Таким образом, зависимость v от h задаётся параболой, направленной рогами вбок; наклон её касательной убывает с ростом h. В частности, по мере увеличения равные приращения h дают меньшие приращения v.

Вопрос. А откуда мы знаем, что вес тела массы m равен mg?

Ответ. По определению, g — это ускорение, вызываемое силой тяжести W (то есть весом), действующей на свободно падающую массу. Следовательно, по второму закону Ньютона ($F = ma$, страница 142), имеем $W = mg$.[4]

6.3 Большие обороты на перекладине и хомячок в колесе

Большие обороты — это базовый гимнастический элемент на перекладине: гимнаст стоит на руках, совершает оборот, прокручиваясь под перекладиной, снова поднимается в стойку на руках, и так далее (рисунок 6.3a).

Вопрос. Гимнаст неподвижно висит на перекладине. Будем считать, что между его руками и перекладиной нет трения: хват абсолютно скользящий — запястиями невозможно создать момент силы. Сможет ли он выполнить большие обороты? Будем игнорировать прогиб перекладины, сопротивление воздуха и другие мелочи.

---

[3] Потенциальная энергия, по определению, есть работа, необходимая для поднятия массы на высоту h. Эта работа равна: сила $\cdot$ высоту = вес $\cdot$ $h = mgh$, так как вес равен mg.

[4] Конечно же, здесь используется равенство гравитационной и инерционной массы. — *Прим. ред.*

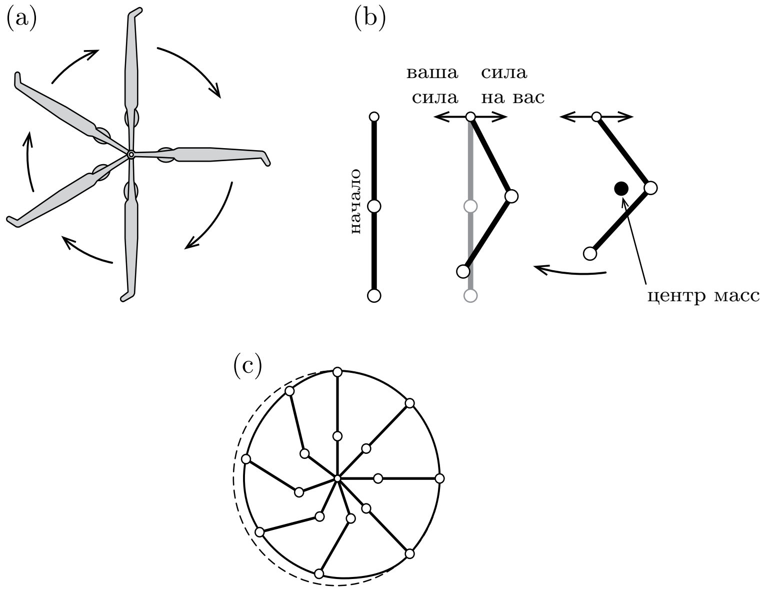


Рис. 6.3: (a) Выполнение больших оборотов на перекладине. (b) Как используется момент веса. (c) Как подкачивать энергию в большие обороты.

Многие физики и математики отвечают приблизительно следующее:

> *«Без трения нет момента силы, а без момента силы невозможно создать момент импульса, и значит, вращение невозможно. В частности, без трения гимнаст не сможет выполнить большие обороты.»*[5]

Это рассуждение неверно. К счастью, юные гимнасты, которые выполняют большие обороты, не знают физики достаточно хорошо, чтобы их остановила подобная логика. Они не слыхали ни о моменте силы, ни о моменте импульса — зачастую всех прожитых ими лет не хватило бы для подготовки диссертации. Выходит, что меньше знаешь — легче вертишься!

Где же ошибка? Неверно уже предположение об отсутствии момента силы: сила тяжести может создавать момент. Этот момент равен нулю, пока гимнаст висит неподвижно — это правда — но, сгибая

[5] Момент силы и момент импульса обсуждаются в приложении.

тело, гимнаст может сделать этот момент ненулевым. Давайте разберёмся как.

Представьте, что вы висите на перекладине (рисунок 6.3b) и сгибаетесь в поясе, как будто пытаетесь дотянуться руками до пальцев ног. Напрягая мышцы живота, вы тянете руки вперёд, тем самым толкая перекладину вперёд (стрелка влево на рисунке). Перекладина в ответ толкает вас вправо — по третьему закону Ньютона (действие равно противодействию). Значит, ваш центр масс тоже смещается вправо — по второму закону Ньютона. Теперь центр масс уже не совсем под перекладиной, и сила тяжести создаёт момент, который меняет момент импульса, увлекая тело под перекладину, как в маятнике. Итак, сгибая тело, вы заставляете силу тяжести создавать ненулевой момент.

Вопрос. Предположим, что гимнаст уже выполняет большие обороты. Что ему (в принципе) следует делать, чтобы их ускорить?

Ответ. Принцип точно такой же, как на качелях: нужно совершать положительную суммарную работу. Для этого следует приближать центр масс к перекладине тогда, когда это труднее (внизу), и отдалять его от перекладины тогда, когда это легче (вверху).

Грубая пародия на это показана на рисунке 6.3c.

Несбалансированное колесо. А вот другой способ понять движение гимнаста. На рисунке 6.3c показана траектория его центра масс. Представим, что масса размазана по всей траектории — будем думать, что она лежит на ободе колеса, с осью на перекладине. Так как колесо смещено вправо, момент силы тяжести будет направлен по часовой стрелке. Такое смещение можно поддерживать, постоянно подстраивая спицы колеса; это сделает момент силы тяжести постоянным. Именно это позволит набирать скорость и компенсировать трение.

Заметим, что хомяк в колесе делает то же самое: он смещает центр масс и тем самым заставляет момент силы тяжести раскручивать колесо. (Хотя сам хомяк вряд ли думает в этих терминах.)

Задача. Изменение длины спиц в регулируемом колесе требует работы. Попробуйте разобраться, как именно следует менять длины спиц, чтобы поддерживать смещение обода.

Обратите внимание, что натяжение у укорачивающихся спиц в среднем должно быть больше, чем у удлиняющихся. Как и раньше, длина спицы определяет расстояние от центра масс гимнаста до перекладины.

6.4 Машина на льду

Следующую задачу я узнал от Энди Руины из Корнеллского университета.

Задача. Представьте, что вы за рулём машины; вы едете по прямой по замёрзшему озеру и надавили тормоз. Разумеется, лучше всего, чтобы колёса продолжали крутиться, но если всё-таки не повезло, какие бы колёса вы предпочли заблокировать: передние или задние?[6] Ваша цель — остановиться, двигаясь прямо без заноса.

Решение. Как это ни странно, лучше, если заблокируются передние колёса.[7] В этом случае машина продолжит двигаться прямо. Если же заблокируются задние, то машина развернётся и до полной остановки будет двигаться задом наперёд (при условии, что руль фиксирован). Резко вдавив задний тормоз на велосипеде, можно заметить схожий эффект: если удалось заблокировать заднее колесо, то оно начнёт скользить в сторону.[8]

Объяснение. Помогает сравнение с движением стрелы. Стрела летит прямо, потому что оперение не даёт хвосту уходить в сторону (см. рисунок 6.4). То же происходит и с машиной, когда передние колёса заблокированы: катящиеся задние колёса играют ту же роль стабилизирующего оперения. Поэтому если задние колёса продолжают катиться, то машина приобретает устойчивость, но теряет её, если катятся только передние.

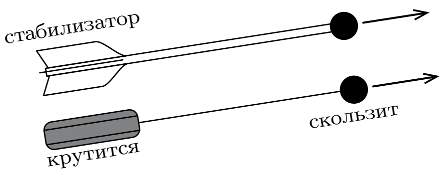


Рис. 6.4: Как оперение удерживает стрелу прямо, так и катящиеся задние колёса удерживают прямо машину (с заблокированными передними колёсами).

[6] Можно думать, что вы сменили резину на зимнюю только на передних или только на задних колёсах. — *Прим. ред.*

[7] В этом случае рулить бессмысленно, но ваша цель лишь двигаться прямо.

[8] Ещё можно провести опыт со скейтбордом на паркете: два колеса заблокировать, засунув их в войлочные тапочки, а к другим прижать по куску войлока, чтобы получилось как при торможении. — *Прим. ред.*

Однажды вечером, в снежную погоду, я проделал такой эксперимент на пустой заснеженной парковке. Блокировка задних колёс (ручным тормозом) легко разворачивала машину на 180°.

6.5 Как поворачивать на велосипеде

Задача. Велосипедист едет прямо и внезапно решает свернуть налево. Что при этом он делает с рулём?

Решение. Чтобы поворачивать налево, нужно, чтобы велосипед наклонялся влево; наклон нужен, чтобы скомпенсировать центробежную силу. Для создания этого наклона велосипедист на мгновение подворачивает руль вправо, в результате колёса уходят из-под него вправо, а тело по инерции продолжает двигаться прямо (рисунок 6.5). Добившись нужного наклона влево, следует поворачивать руль влево, вписываясь в желаемый поворот.

Если вы проверите это на себе (как сделал я), то заметите, что руки подсознательно делают первоначальный обратный поворот.[9] Наши рефлексы отлично разбираются в механике.[10]

Рис. 6.5: Чтобы свернуть влево, велосипедист сначала чуть поворачивает руль вправо, создавая наклон влево.

В дополнение к сказанному, у быстро движущегося велосипеда с

[9]Это может зависеть от стиля езды на велосипеде, при повороте старайтесь двигать руль, но не тело. — *Прим. ред.*

[10]Те читатели, которые умеют управлять велосипедом, не держась за руль, могут попытаться разобраться, как это у них получается. Лучше всего сначала привести доказательство того, что это невозможно, а потом найти в нём ошибку. Сравнение с большими оборотами (раздел 6.3) может оказаться полезным. — *Прим. ред.*

массивными шинами наклон усиливается за счёт гироскопического эффекта. Повернув руль вправо, вы поворачиваете переднее колесо, вызывая ощутимый наклон влево.[11]

6.6 Разгон одним наклоном

Вопрос. Можно ли изменить скорость велосипеда, используя только руль? Не разрешается крутить педали и двигаться телом.

Ответ. Предположим, что велосипед движется по прямой. Тогда при входе в поворот скорость увеличится из-за наклона.[12] Причина такая: при наклоне уменьшается потенциальная энергия, следовательно, увеличивается кинетическая, а вместе с ней и скорость.[13]

А как же зависит прирост скорости от начальной скорости (при одном и том же угле наклона)? Удивительно, но прирост оказывается больше при меньших скоростях.[14]Один и тот же угол наклона при движении со скоростью 2 км/ч даст больший прирост скорости, чем при 20 км/ч. Вот объяснение. Когда я наклоняюсь и тем самым опускаю свой центр масс на величину h, я увеличиваю кинетическую энергию ровно настолько, насколько уменьшил потенциальную:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh,$$

где V — новая скорость, а v — начальная скорость.[15] Сократив m, получим

$$V^2 - v^2 = 2gh,$$

и после пары алгебраических манипуляций получим

$$V - v = \frac{2gh}{v+V} = \frac{2gh}{v + \sqrt{2gh + v^2}}.$$

В частности, с ростом начальной скорости v её прирост $V - v$ уменьшается.

[11]Поворачивая переднее колесо, вы создаёте момент импульса относительно прямой по которой едет велосипед. Этот момент должен компенсироваться наклоном велосипеда влево. — *Прим. ред.*

[12]Как наклоняется велосипед при входе в поворот, описано в предыдущей задаче.

[13]Строго говоря, часть энергии превращается в кинетическую энергию вращения — ведь велосипедист теперь вращается. Тем не менее можно показать, что остаётся достаточно энергии, чтобы вызвать увеличение скорости.

[14]По той же причине прыжок с вчетверо большей высоты лишь удваивает скорость. (Сравни с 6.2. — *Прим. ред.*)

[15]Напомню, что часть кинетической энергии ушла на вращение, но этим можно пренебречь.

6.7 Беспредельный беспедальный разгон

Как мы только что выяснили, велосипедист может разогнаться, зайдя в поворот. Но это даёт лишь небольшой, однократный прирост скорости — его нельзя повторять для разгона велосипеда.

Задача. Может ли велосипедист (теоретически) увеличивать свою скорость бесконечно, не крутя педали, а только двигая телом?

Чтобы исключить возможные лазейки, считаем, что ветра нет, нельзя пользоваться двигателями и так далее.

Подсказка. Колесо напоминает конёк на льду: оба легко движутся куда направлены и не хотят двигаться вбок.

Решение. Я начинаю движение по прямой, сидя прямо. Моя цель — оказаться в том же положении, но с большей скоростью. Добиться этого можно в три шага:

1. Наклониться вперёд к рулю, опустив тем самым центр масс.
2. Войдя в крутой поворот, выпрямиться, тем самым поднимая центр масс.
3. Снова начать ехать прямо.

Почему же эти действия увеличат скорость? Заметим, что при движении по окружности перегрузка становится больше из-за дополнительного центробежного эффекта.[16] Когда я выпрямляюсь против этой большей силы, я совершаю больше работы, чем ту, которую «получаю обратно», опуская центр масс.[17] Разность этих энергий переходит в приращение моей кинетической энергии. Тот же принцип используют дети, раскачиваясь на качелях, и гимнасты, выполняя большие обороты.

Другое объяснение. Прирост скорости можно объяснить через сохранение момента импульса. При движении по окружности мой момент импульса относительно центра окружности остаётся постоянным (так как момент силы, действующей на меня относительно центра окружности, равен нулю — закон сохранения момента импульса обсуждается на странице 154). Когда я выпрямляюсь, центр масс

[16] Это подробно объясняется в следующей задаче.

[17] Когда я говорю, что «получаю обратно» энергию, я имею в виду использование гравитационной энергии для зарядки батареи, подобно тому, как гибридный автомобиль делает это при торможении.

приближается к центру окружности, и, чтобы сохранить момент импульса, должна возрасти скорость.[18]

6.8 Как набрать вес на мопеде

Вопрос. Вы едете на мопеде ровно по окружности с постоянной скоростью, наклоняясь в сторону поворота под фиксированным углом. Какую перегрузку вы испытываете? Другими словами, какой вы ощущаете вес?

Ответ. На рисунке 6.6 показаны две силы, действующие на мопед: (1) реакция опоры R и (2) его вес W. Сила реакции R и есть ощущаемый вес. Равнодействующая этих двух сил — это центростремительная сила, которая заставляет мопед двигаться по окружности. Следовательно, эта равнодействующая направлена к центру окружности, а значит, горизонтально, как это и показано на рисунке 6.6. Треугольник ABC прямоугольный, и угол при A совпадает с углом наклона θ.

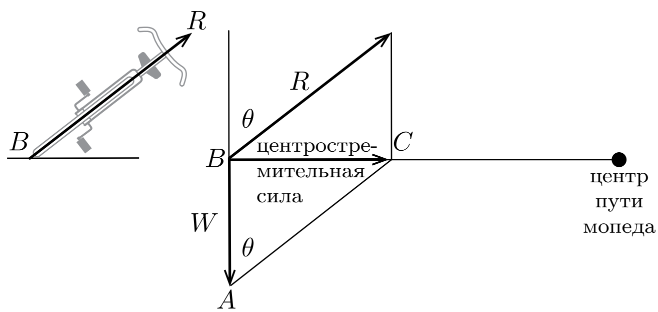


Рис. 6.6: Прирост веса при движении по окружности.

Из $\triangle ABC$ получаем

$$\frac{W}{R} = \cos\theta. \tag{6.1}$$

Поскольку $\cos\theta < 1$, получаем, что $R > W$ — при равномерном повороте всегда будет перегрузка. При $\theta = 30^\circ$ ощущаемый вес увеличивается на 15%. Если удастся удерживать наклон в 45°, то вес увеличится на 41%: 70-килограммовый человек будет чувствовать себя 100-килограммовым. При 60° (огромном наклоне) вес удвоится.

[18]Строго говоря, велосипед с человеком не образуют замкнутую систему, ведь они взаимодействуют с землёй. Значит, надо дополнительно убедиться, что импульс не вкачивается и не выкачивается из системы. — *Прим. ред.*

Та же формула работает и для самолёта при равномерном повороте. Например, для постоянной перегрузки $2g$, пилот должен наклонить самолёт на 60° (так что крылья будут составлять 30° с вертикалью). Это также показывает, что, входя в поворот на машине, вы становитесь тяжелее. Можно определить, насколько именно, измерив угол θ с помощью подвешенного на нитке груза и подставив результат в (6.1).

6.9 Как почувствовать квадрат в $\frac{mv^2}{2}$ через велосипедные педали?

Кинетическая энергия K определяется как работа, необходимая для разгона массы m из состояния покоя до заданной скорости v. Как мы знаем, $K = mv^2/2$; это объясняется на странице 145 в приложении.

Вопрос. Как почувствовать квадрат в $\frac{mv^2}{2}$ через велосипедные педали? Будем считать, что вы едете по ровной дороге, без сопротивления воздуха и трения качения.

Ответ. Так как v возводится в квадрат, то чем быстрее вы едете, тем больше топлива требуется, чтобы прибавить 1 км/ч. Действительно, чтобы разогнаться от v до $v+1$, нужна энергия

$$\frac{m(v+1)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{m(2v+1)}{2} = mv + \tfrac{m}{2} > mv.$$

Так что энергетическая цена растёт с ростом v.

Чтобы интуитивно ощутить эту растущую цену, представьте, что вы нажимаете на педали с постоянной силой, тем самым ускоряясь с постоянным ускорением. То есть на то, чтобы прибавить 1 км/ч, уходит та же секунда, независимо от того, как быстро вы движетесь. Но вот неприятность: при быстром движении педали приходится крутить быстрее, и за ту же секунду ваши ноги проходят большее расстояние. Это означает, что за секунду быстрой езды вы совершаете больше работы, чем за секунду медленной. Итак, чтобы поддерживать постоянное ускорение, ваш двигатель должен работать всё быстрее и быстрее, сохраняя ту же силу. Иначе говоря, его мощность должна постоянно расти. Так что спешка изнуряет даже без трения, а с трением дела ещё хуже.

Задача. Насколько больше топлива требуется, чтобы разогнаться до 70 км/ч, чем до 10 км/ч (пренебрегая всеми потерями на трение и предполагая идеальный двигатель со стопроцентным КПД)?

Решение. Почти в 50 раз! Действительно,

$$\frac{K_{70}}{K_{10}} = \frac{m \cdot 70^2/2}{m \cdot 10^2/2} = \frac{70^2}{10^2} = 49.$$

6.10 Парадокс с ракетами

Ускоряющаяся ракета. Когда ракета сжигает порцию топлива, её скорость увеличивается на определённую величину. *Эта величина не зависит от того, с какой скоростью ракета двигалась до начала сжигания топлива.*[19] То есть прирост скорости ракеты в расчёте на единицу истраченной энергии не зависит от её текущей скорости; в этом ракета отличается от велосипеда: чем быстрее движется велосипед, тем труднее его разгонять.[20] Это различие приводит к следующему любопытному выводу.

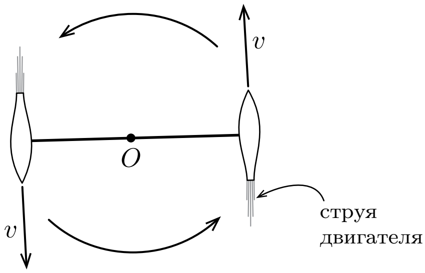


Рис. 6.7: Ракеты получают больше кинетической энергии, чем её было в топливе, но разве такое возможно?

Парадокс. На рисунке 6.7 изображены две ракеты, закреплённые на стержне, который может свободно вращаться вокруг точки O. Сообщив ракетам начальное вращение так, что каждая ракета движется со скоростью v, мы включаем их двигатели. После сгорания топлива скорость каждой ракеты увеличивается на 1 м/с. Это приращение одинаково независимо от начальной скорости v. Теперь скорость равна $v + 1$, суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$E_{\text{после}} = m(v + 1)^2,$$

[19] Всё происходит в невесомости; скорости меряются в инерциальной системе.

[20] Дополнительные пояснения на странице 65.

а прирост кинетической энергии равен

$$\Delta K = \underbrace{m(v+1)^2}_{\text{после}} - \underbrace{mv^2}_{\text{до}} = 2mv + m.$$

Согласно этой формуле, приращение энергии ΔK можно сделать произвольно большим, выбрав подходящую скорость v. Получается, что ракеты могут получить больше кинетической энергии, чем содержалось в их топливе! Неужели это правда?

Ответ. Это может прозвучать неожиданно, но ответ на последний вопрос утвердительный — ракеты могут получить за время работы двигателей больше энергии, чем содержалось в топливе. Однако это не нарушает закон сохранения энергии, ведь выброшенное топливо — это тоже участник процесса, а оно теряет значительную часть своей кинетической энергии. При больших скоростях эта потеря особенно велика. Если учесть эту энергию, то парадокс тут же испарится.

Более подробное обсуждение схожей задачи приведено на страницах 69—71.

6.11 Ракета-кофеварка

Некоторые кофеварки снабжены рычагом, нажимая на который, вы перекачиваете кофе в чашку. Обратите внимание, что струя кофе, бьющая вниз, создаёт подъёмную реактивную силу, действующую на кофеварку. Обычно эта сила слишком мала, чтобы поднять кофеварку, не говоря уже о преодолении давления руки, нажимающей на рычаг. Однако попробуйте разобраться, может ли подобная кофеварка взлететь в принципе.

Вопрос. Можно ли, хотя бы в принципе, сконструировать кофеварку с такими пропорциями, чтобы она поднималась со стола, когда нажимают рычаг?

Ответ (прыгающая кофеварка). Удивительно, но это возможно. Если отношение плеч рычага L/ℓ на рисунке 6.8 очень велико, то сила F на поршне будет огромной. Следовательно, можно достичь произвольно большой реактивной тяги, прикладывая лишь слабую силу f (заглавные буквы F, L и их строчные варианты f, ℓ указывают, кто больше, а кто меньше). Так что реактивная сила может превысить сумму веса и приложенной силы f. К сожалению, рычаг в такой кофеварке придётся двигать очень быстро, ведь для поддержания вы-

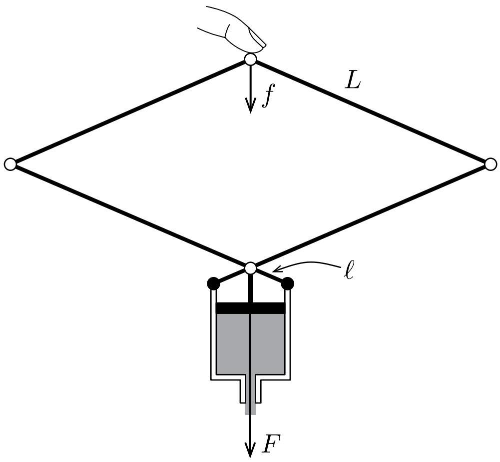


Рис. 6.8: Можно ли заставить что-то взлететь, надавив сверху?

сокого давления требуется достаточно большая скорость (закон Бернулли объясняется на странице 42). Так что розыгрыш с прыгающей кофеваркой не удастся осуществить. И это досадно, ведь если бы идея сработала, то кофе давило бы на чашку с силой, превышающей вес кофеварки в сумме с силой давления на рычаг.

Теперь подробней. Чтобы кофеварка поднялась, реактивная сила струи F_J должна превысить сумму веса[21] W и силы f:

$$F_J > W + f. \tag{6.2}$$

Для определённости будем считать, что $f = W/2$. Тогда условие отрыва примет вид

$$F_J > \tfrac{3}{2}W. \tag{6.3}$$

Ясно, что если сила поршня F достаточно велика, то и реактивная сила струи F_J окажется достаточно большой; так что для F_J будет выполняться условие (6.3). Таким образом, всё, что нужно, — это создать очень большую силу поршня. А этого можно добиться, выбрав отношение плеч рычага достаточно большим. Действительно, по закону рычага

$$F = \frac{L}{\ell} f,$$

[21] Вес кофеварки уменьшается из-за выливающегося кофе, но не будем обращать внимание на эти мелочи. Для тех же, кто настаивает на большей строгости, можно сказать так: пусть W — это начальный (наибольший) вес кофеварки, до того как полилось кофе.

и, следовательно, силу F можно сделать сколь угодно большой, увеличивая отношение L/ℓ.

Задача. Можно ли достичь отрыва при $f > W$, то есть нажимая с силой, превышающей вес кофеварки?

Задача. Вода под давлением перетекает из верхнего сосуда в нижний с постоянной скоростью. Оба сосуда находятся на платформе весов. Что будут показывать весы по сравнению с суммарным весом сосудов и воды?

6.12 Бросок на ходу машины

Ситуация. Бросая мячик вперёд из движущейся машины, я сообщаю ему дополнительную кинетическую энергию. Однако прирост энергии мячика (с точки зрения наблюдателя на земле) может превысить ту энергию, которую затратили мои мышцы при броске, — не правда ли, странно? Абзац ниже прояснит суть дела.

Подробности. Изначально мячик двигался вместе с машиной со скоростью V. Я бросил мячик вперёд со скоростью $v = 1$, и теперь его скорость равна $V + 1$, а изменение кинетической энергии мячика составит

$$\Delta K_{\text{мяч}} = \underbrace{\frac{m(V+1)^2}{2}}_{\text{после}} - \underbrace{\frac{mV^2}{2}}_{\text{до}} = \frac{m}{2} + mV. \tag{6.4}$$

Парадокс. Согласно (6.4), чем быстрее движется машина, тем больше кинетической энергии приобретает мячик (при той же скорости броска $v = 1$)! Ещё удивительнее то, что энергия, приобретённая мячиком, может превышать энергию, затраченную моими мышцами, если машина движется достаточно быстро. Как это объяснить?

Решение. Хотя при выводе (6.4) было сделано неверное допущение (см. абзац ниже), странный вывод остаётся в силе: мячик действительно может получить больше энергии, чем произвела моя рука. Однако этот прирост происходит за счёт потери кинетической энергии машины. Нельзя упускать из виду то, что происходит с машиной, как это делалось в (6.4), даже если этот эффект кажется малым, ведь когда я бросаю мячик вперёд, машина получает толчок назад. Поэтому кинетическая энергия машины уменьшается, и с учётом этого уменьшения получается верное значение общего прироста кинетической энергии.

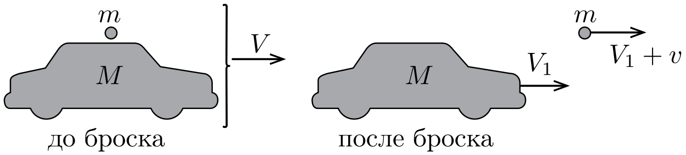


Рис. 6.9: Как перераспределяется кинетическая энергия.

Баланс энергии без жульничества. Вот точное решение парадокса (не будем отвлекаться на трение, сопротивление воздуха и другие мелочи). Сначала найдём скорость машины после броска. Акт броска не изменяет импульса системы (см. рисунок 6.9):

$$(M+m)V = MV_1 + m(V_1+v), \tag{6.5}$$

где M — масса машины, m — масса мячика, V_1 — новая скорость машины, а v — скорость мячика относительно машины в момент броска.

Общее изменение кинетической энергии равно

$$\Delta K_{\text{общ}} = \underbrace{\frac{MV_1^2}{2}}_{\text{машина после}} + \underbrace{\frac{m(V_1+v)^2}{2}}_{\text{мячик после}} - \underbrace{\frac{(m+M)V^2}{2}}_{\text{машина и мячик до}}, \tag{6.6}$$

Воспользовавшись (6.5) и перескочив через алгебраические выкладки, получаем

$$\Delta K_{\text{общ}} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{m+M}. \tag{6.7}$$

Обсуждение.

1. Согласно (6.7), $\Delta K_{\text{общ}}$ не зависит от начальной скорости машины V, как и ожидалось.

2. Если $M \gg m$, как в случае машины и мячика, то из (6.7) получаем $\Delta K_{\text{общ}} \approx mv^2/2$, как если бы машина стояла на месте — тоже вполне согласуется с ожиданиями.

3. Разница энергий $\Delta K_{\text{общ}}$ разбивается на две части:

$$\Delta K_{\text{общ}} = \Delta K_{\text{мяч}} + \Delta K_{\text{маш}} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{m+M}.$$

Если машина движется быстро, то $\Delta K_{\text{мяч}}$ будет сильно положительной, а $\Delta K_{\text{маш}}$ — сильно отрицательной. То есть мячик ворует энергию у машины. Общая разница $\Delta K_{\text{общ}}$ не зависит от скорости машины, однако от неё очень даже зависит то, как $\Delta K_{\text{общ}}$ разбивается на $\Delta K_{\text{мяч}}$ и $\Delta K_{\text{маш}}$.

Глава 7

Парадоксы силы Кориолиса

7.1 Что такое сила Кориолиса

Вопрос. Представим себе, что вы играете в мяч, стоя посреди платформы крытой карусели, так что вам ничего не видно снаружи. Вы кидаете мяч точно в цель на краю (как показано на рисунке 7.1), но он отклоняется вправо и вы промахиваетесь. В чём же дело? Забудем пока о силе тяжести и будем считать, что вращение происходит против часовой стрелки.

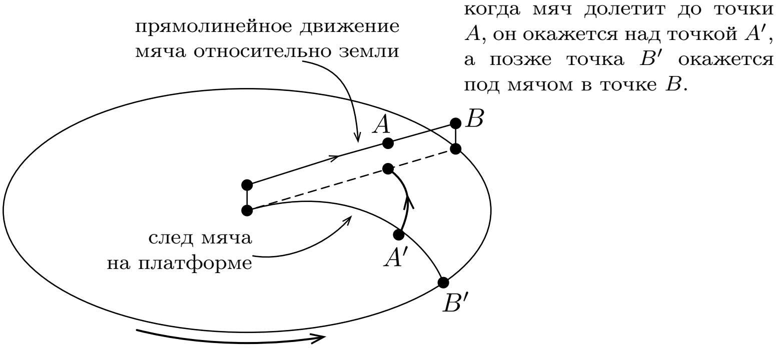


Рис. 7.1: Объяснение силы Кориолиса.

Ответ. Проще всего объяснить дело так: «На самом деле мяч летит прямо, но из-за вращения платформы смещается сама цель. Поэтому мяч и пролетает правее. Просто в закрытом вращающемся помещении создаётся впечатление, будто это мяч отклонился вправо».

Чтобы получше в этом разобраться, вообразите, что мяч отмечает свой путь на платформе, выпуская вниз струйку чернил.[1] Хотя мяч летит прямо, из-за вращения платформы след, который он оставит, окажется изогнутым, как показано на рисунке. Для нас, находящихся на земле, в таком искривлении нет ничего загадочного. Но наблюдатель на платформе[2], который поворачивается вместе с ней, воспринимает её неподвижной, испытывая иллюзию действия дополнительной силы. Эта мнимая сила и называется *силой Кориолиса*.

Мы с вами живём во вращающемся мире, где сила Кориолиса проявляется повсюду. Она вызывает вращение циклонов и антициклонов, а также влияет на океанические течения. Сила Кориолиса обсуждается во многих книгах, например у Арнольда [1], у Гольдштейна [6] и у Ландау с Лифшицем [9].[3]

Вопрос. Река Гудзон течёт на юг. В каком направлении сила Кориолиса действует на текущую в ней воду?

Ответ. Сила отклоняет воду на запад. Действительно, представьте порцию воды, движущуюся на юг вдоль меридиана. Из-за вращения всё на Земле движется на восток, причём чем дальше от северного полюса, тем быстрее. Поэтому когда порция воды в Гудзоне удаляется от полюса, её скорость в восточном направлении возрастает. Значит, по инерции вода будет прижиматься к западному берегу реки, сопротивляясь этому возрастанию. Ну а самой воде будет казаться, что берег толкает её на восток. Объясняет ли это то, что западный берег Гудзона (напротив Манхэттена, со стороны Нью-Джерси) крутой, а восточный (манхэттенский) — пологий? Скорее всего, нет.

7.2 Кориолис в самолёте

Вопрос. Насколько велика сила Кориолиса, действующая на человека в реактивном самолёте (обычная скорость около 250 м/с)?[4]

---

[1] Напомним, что мы пренебрегаем силой тяжести. Соответственно мяч летит по горизонтальной прямой.

[2] Земля — это пример такой платформы, хотя на протяжении большей части человеческой истории люди не осознавали её вращения.

[3] Она также обсуждается в приложении. — *Прим. ред.*

[4] Следует предположить, что самолёт летит прямо относительно земли, без сноса. — *Прим. ред.*

Ответ. Чтобы упростить вычисления, будем считать, что самолёт летит вдоль меридиана над Северным полюсом.

В этом случае можно думать, что Земля — это плоская платформа — огромная карусель, вращающаяся вокруг своей оси. Тогда пассажир испытывает силу Кориолиса[5]

$$F = 2m\omega v, \tag{7.1}$$

где m — его масса, ω — угловая скорость вращения Земли, а v — скорость самолёта. Округлим человека до $m = 70$ кг (извините за каламбур), $\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 3600}$ рад/с и $v = 250$ м/с. Подставив всё это в (7.1), получим $F/g \approx 250$ г — *хватит, чтобы держать стакан воды!*

Об этой силе можно судить по углу θ, на который она отклоняет маятник. Этот угол (в радианах) близок к отношению силы Кориолиса к весу mg:

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{2\omega v}{g}.$$

Получается примерно 1/300 радиана, что около 0,2°. Именно на такой угол самолёт теоретически должен накрениться, чтобы избежать бокового сноса. Что это означает в терминах разницы высот между концами крыльев? Примерно 1/300 от размаха крыла. Размах крыла Боинга 747 около 60 м, а значит, разница высот порядка 20 см. Немного, но заметить можно.

7.3 Кориолис в канализации

Вопрос. Считается, что благодаря силе Кориолиса в северном полушарии водоворот при сливе из ванны происходит по часовой стрелке, но правда ли это?

Ответ. Нет, неправда. Сила Кориолиса действует и в унитазе, и в ванне, но она ничтожно мала. Эту силу непросто заметить даже в самолёте (см. предыдущий раздел), и ещё труднее в воде, которая движется в тысячи раз медленнее. Причина водоворота в другом. В некоторых унитазах, например, вода подаётся под углом, так что она уже закручена. В ванне вращение может возникнуть из-за того, что воду взболтнули и она приобрела небольшую зави́хренность[6], которая становится заметной лишь при подходе к сливному отверстию. Водоворот может начаться даже из состояния покоя — это происходит из-за сочетания асимметрии ванны и вязкости воды. На рисунке

[5] Эту формулу можно найти в упомянутых выше книгах. На странице 79 я «выведу» эту формулу без множителя 2 и предложу найти ошибку.

[6] Завихренность определена на странице 50.

Рис. 7.2: Водоворот в сливном отверстии может быть вызван асимметрией ванны в сочетании с вязкостью воды.

7.2 приведён пример ванны, которая будет сливаться против часовой стрелки и в Бостоне, и в Буэнос-Айресе.

7.4 Высокое давление и хорошая погода

Вопрос. Области повышенного атмосферного давления называются антициклонами.[7] В северном полушарии они вращаются по часовой стрелке. Как же повышенное давление связано с вращением по часовой стрелке?

Ответ. Это объясняется силой Кориолиса. Представьте, что воздух сначала расходится от центра (рисунок 7.3а). Тогда (в северном полушарии) сила Кориолиса будет отклонять каждую частицу воздуха вправо от направления потока.[8] От этого поток станет отклоняться от радиального направления, закручиваясь по часовой стрелке. Можно представить себе установившееся вращение воздушных масс, при котором сила Кориолиса, действующая на движущиеся по кругу частицы, как бы сдерживает высокое давление в центре антициклона — они бегают как овчарки вокруг стада овец, собирая его вместе (рисунок 7.3).

Как антициклоны связаны с хорошей погодой? Благодаря «подушке» повышенного давления в центре воздух движется вниз, нагревается от сжатия[9], и облака «растворяются». В циклонах происходит противоположное: воздух поднимается, охлаждаясь при расширении, и влага конденсируется, образуя облака.

[7] Приставка *анти-* указывает на вращение, противоположное вращению Земли.
[8] Как и порцию воды в Гудзоне на странице 73.
[9] Нагревание от сжатия объясняется на странице 108.

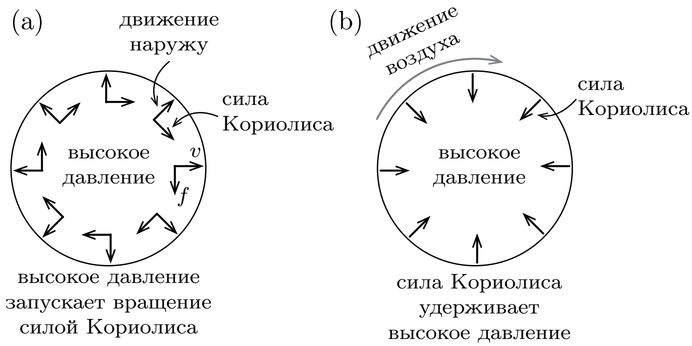


Рис. 7.3: Сила Кориолиса связывает высокое давление с антициклонами.

7.5 Что вызывает пассаты?

Пассаты — это ветры тропического пояса, постоянно дующие с востока на запад. Откуда они берутся?

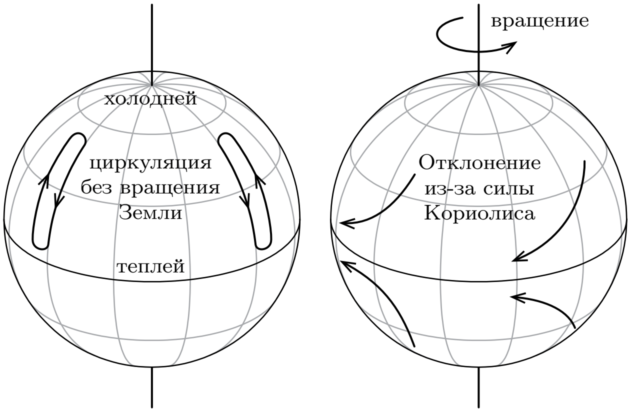


Рис. 7.4: Пассаты возникают в результате действия силы Кориолиса на потоки воздуха.

Причина в сочетании атмосферной циркуляции и силы Кориолиса. Ниже приводится сильно упрощённая схема, которая всё же даёт представление о том, что происходит.

1. Более холодный воздух течёт с высоких широт в сторону экватора. Это происходит в нижних слоях атмосферы и напоминает

то, как из открытой двери холодный воздух растекается по полу комнаты.

2. Теперь в игру вступает сила Кориолиса. Она отклоняет этот поток к западу, как показано на рисунке 7.4.

3. Ближе к экватору воздух нагревается, поднимается вверх и движется обратно к полюсам, но уже в верхних слоях атмосферы.

Атмосфера подобна двигателю на солнечной батарее. Она потребляет энергию солнечного излучения и возвращает её обратно в космос через излучение. Небольшая часть солнечного тепла заставляет атмосферу двигаться, преодолевая трение. Трение превращает эту энергию в тепло, которое и излучается наружу. То есть крохотная часть всей солнечной энергии встряхивает атмосферу Земли по пути от Солнца в космос. Земля со всем, что на ней, включая нас с вами, подобна организму, который поглощает энергию и выделяет её в том же количестве, но в другой форме, а точнее, в другой части спектра излучения.

Глава 8

Центробежные парадоксы

8.1 Куда лететь дешевле, на запад или на восток?

Задача. Известно, что на полёт из Бостона в Лондон расходуется меньше топлива, чем на обратный рейс. Это происходит потому, что ветер дует примерно в восточном направлении. Но представим себе, что ветер волшебным образом исчез. Исчезло бы тогда и различие в расходе топлива? Чтобы не отвлекаться на мелочи, давайте заменим Бостон с Лондоном парой точек A и B на экваторе и спросим: при отсутствии ветра будет ли перелёт на восток из A в B требовать столько же топлива, сколько перелёт на запад из B в A?

Решение. Из-за вращения Земли полёт на восток потребует меньше топлива. Действительно, каждая точка экватора совершает орбитальное движение вокруг центра Земли. Если самолёт движется на восток, то это *увеличивает* его орбитальную скорость. Значит, увеличивается центробежная сила, и самолёт становится чуть легче. Ну а если самолёт легче, то и расход топлива меньше.[1]

Ну а насколько легче? При скорости полёта 250 м/с разница в весе составит около $\frac{2}{3}\%$ (две трети процента).[2] Загруженный Boeing 747

[1]Тяжёлый самолёт расходует больше топлива даже при горизонтальном полёте. Ведь самолёт удерживается в воздухе, отталкивая воздух вниз за счёт положительного угла атаки своих крыльев. Чем тяжелее самолёт, тем больше воздуха ему приходится ускорять вниз. Для этого приходится увеличивать угол атаки. Как следствие, требуется большая тяга двигателей.

[2]Чуть ниже мы увидим, что отношение разности весов к истинному весу вычисляется по формуле $4v\omega/g$, где v — скорость самолёта, ω — угловая скорость вращения Земли, а g — ускорение свободного падения.

может весить 300 тонн. Значит, разница составит тонны две, то есть человек 30 без багажа!

Можно думать, что самолёт, по сути, спутник, только очень медленный: бóльшую часть веса держат его крылья, но немного веса приходится на центробежную силу.

Однако напомню ещё раз, что влияние ветра сильней центробежных эффектов.

Задача. А как, зная вес самолёта в покое, подсчитать, насколько он станет легче за счёт центробежной силы?

Решение. Разница между весом при полёте на восток и на запад равна разнице центробежных сил[3]:

$$\Delta W = \frac{mv^2_{\text{восток}}}{R} - \frac{mv^2_{\text{запад}}}{R} = \frac{m}{R}\left((\omega R + v)^2 - (\omega R - v)^2\right),$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, R — радиус Земли, а v — скорость самолёта. Раскрыв скобки и сократив, получим

$$\Delta W = 4m\omega v.$$

Значит, отношение к весу равно

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{4m\omega v}{mg} = \frac{4\omega v}{g}.$$

8.2 Парадокс с силой Кориолиса

Человек, идущий с (постоянной) скоростью v по платформе, вращающейся с (постоянной) угловой скоростью ω, испытывает ускорение Кориолиса:

$$a = 2\,\omega v. \tag{8.1}$$

Эта формула приводится в нескольких учебниках механики, упомянутых на странице 73. Сейчас я «выведу» похожую формулу, но без множителя 2:

$$a = \omega v. \tag{8.2}$$

Вопрос. Попробуйте найти, где потерялась половина силы Кориолиса в следующем рассуждении.

[3]См. страницу 158.

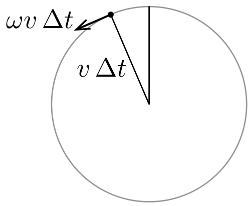


Рис. 8.1: Что не так с этим «доказательством»?

«Вывод» формулы (8.2)**.** Предположим, что я иду по радиусу вращающейся платформы (см. рисунок 8.1) со скоростью v. За время Δt я отойду на расстояние $r = v\,\Delta t$ от центра. Из-за вращения платформы составляющая скорости, перпендикулярная радиусу, станет равна

$$\omega r = \omega v\,\Delta t.$$

Таким образом, за время Δt моя скорость в направлении, перпендикулярном радиусу, изменилась на величину $\Delta v = \omega v\,\Delta t$; следовательно, ускорение равно

$$\Delta v/\Delta t = \omega v\,\Delta t/\Delta t = \omega v.$$

Итак, я получил равенство (8.2). Где же ошибка?

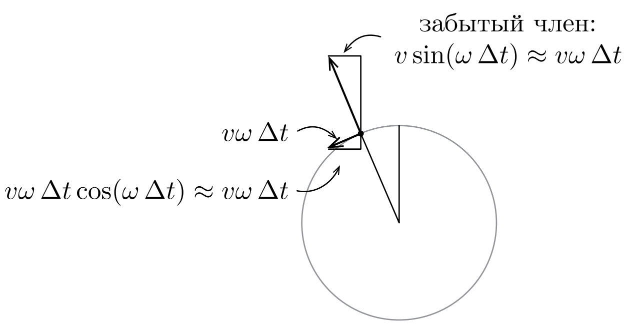


Рис. 8.2: Место пропажи множителя 2.

Решение. Рисунок 8.1 не вполне верен; его надо заменить на рисунок 8.2. Я упустил из виду, что радиус, по которому я шёл, повернулся на угол $\omega\Delta t$, а вместе с ним повернулся и вектор моей скорости. Это добавляет слагаемое $v\sin(\omega\,\Delta t) \approx \omega v\,\Delta t$ к изменению скорости в перпендикулярном направлении к *изначальному* радиусу — та самая потерянная половинка!

Итак, множитель 2 в формуле (8.1) складывается из двух частей: (1) из различия скоростей между точками платформы и (2) из изменения направления движения вследствие поворота платформы.

8.3 Что держит стоячий маятник?

Вопрос. Маятник — это грузик на стержне. У него есть два положения равновесия: висячее устойчиво, а стоячее — неустойчиво. Если установить маятник стоя на опоре, то малейшее движение заставит его упасть. Разумеется, можно удерживать маятник в равновесии, как метлу на ладони, что требует осмысленной реакции на её движение. А что произойдёт, если мы просто будем трясти точку его подвеса (скажем, вверх-вниз)?

Ответ. Если точку подвеса достаточно быстро трясти в вертикальном направлении, то стоячее положение окажется устойчивым. Это поразительное явление известно больше сотни лет [24]. При этом равновесие удерживается совсем не так, как при использовании обратной связи: трясущемуся подвесу наплевать на то, что делает маятник, и он никак не реагирует на его движение. Удивительно, что тряска может оказывать столь умное действие: в конце концов, почему бы быстрым движениям вверх-вниз просто не компенсировать друг друга? И почему тряска помогает устойчивости, а не неустойчивости?

Эксперимент. На рисунке 8.3 показан алюминиевый стержень, который нежёстко приделан к лезвию электролобзика.[4] Когда я включаю лобзик, лезвие начинает быстро ходить вверх-вниз — примерно 30 раз в секунду. При этом возникает ощущение, словно пружина удерживает стержень параллельно движению лезвия. Эта воображаемая пружина достаточно сильна: она способна держать маятник почти горизонтально, если лобзик повернуть, как показано на рисунке 8.3b, справа.

Вопрос. Как же тряске удаётся стабилизировать маятник? (Только без формул!)

Ответ. Вместо того чтобы рассматривать стержень как на рисунке 8.3 или в моём видеоролике, будем думать о грузике, закреплённом на конце невесомого стержня. Ускорение точки подвеса настолько велико, что гравитацией (малой по сравнению с ним) можно пока пре-

[4]Это демонстрируется в моём видеоролике [12].

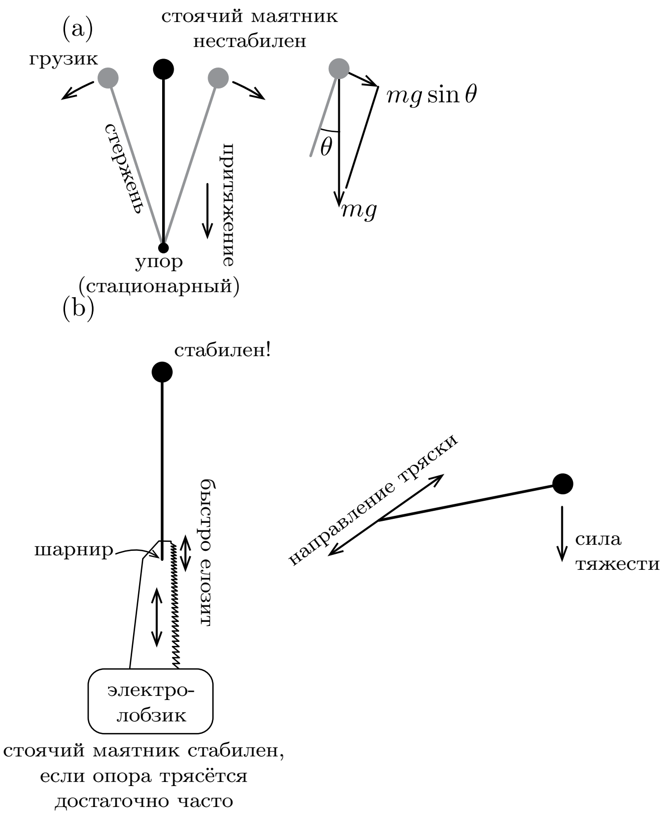


Рис. 8.3: (a) Стоячий маятник нестабилен, но (b) он становится стабильным, если опору сильно трясти.

небречь. Со стороны стержня грузик испытывает сильное притягивание и отталкивание поочерёдно. Поскольку эти тянитолкательные усилия направлены *точно вдоль стержня*, грузик старается двигаться в направлении стержня. Таким образом, грузик стал бы двигаться по кривой траектории, как на рисунке 8.4a. Такая траектория называется *кривой погони* или *трактрисой*.[5] Давайте временно считать, что движение грузика ограничено этой трактрисой. Это довольно безобидное ограничение, ведь оно не мешает толчкам и рывкам со стороны стержня. При таком ограничении грузик будет совершать быстрые колебания взад-вперёд по короткой дуге AB. Но, так как дуга изогну-

[5] Трактриса определяется как кривая, для которой данная прямая отсекает от касательных отрезки равных длин. Например, если катить переднее колесо велосипеда по прямой, то его заднее колесо будет двигаться по трактрисе.

та, грузик двигается с центростремительным ускорением (см. рисунок 8.4b). Можно сказать, что грузик хочет двигаться в противоположном направлении! Если теперь снять ограничение, то грузик подчинится своему желанию. Если тряска достаточно сильна, эта сила превзойдёт дестабилизирующее действие силы тяжести[6], и маятник будет стоять вертикально, что и завершает объяснение.

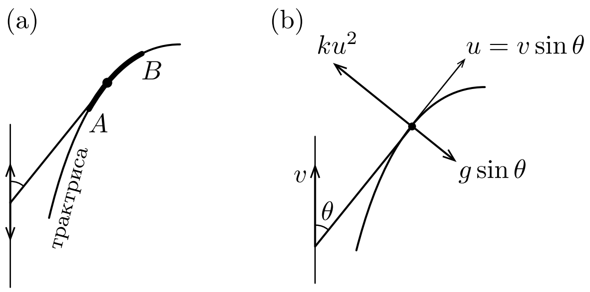


Рис. 8.4: Неочевидная центробежная сила отвечает за устойчивость стоячего маятника.

Ловушка Паула. Описанное явление известно не меньше века; самое раннее упоминание, которое мне удалось найти, содержится в указанной выше статье Стивенсона 1908 года. Тот же самый эффект стабилизации с помощью тряски, но в иной форме, используется в так называемой ловушке Паула — устройстве для удерживания заряженных частиц в вакууме с помощью вибрирующих электрических полей.[7] За это изобретение Вольфганг Пауль был удостоен Нобелевской премии. Объяснение Паула основано на дифференциальных уравнениях. Но я не советую рассказывать его случайному прохожему (даже не пытайтесь, особенно если вы не в своём районе).

[6]Более подробное обсуждение даётся в [10, стр. 158]. Примечательно, что для превращения интуитивной идеи в строгий вывод устойчивости требуется всего пара строк: стоячее положение устойчиво, если $\langle v^2\rangle \geqslant g\ell$, где v — скорость точки подвеса, $\langle\cdot\rangle$ обозначает среднее за период работы электролобзика, а ℓ — длина маятника. Замечу, что приведённое физическое объяснение заменяет длиннющее вычисление и при этом оно объясняет, что происходит на самом деле.

[7]Если бы я оказался в системе отсчёта стержня в эксперименте с лобзиком, то мне бы казалось, что вибрирует сила тяжести.

8.4 Антигравитационная патока

Вопрос. Банка с крышкой наполовину наполнена патокой или другой густой жидкостью вроде мёда. Если перевернуть банку вверх дном, патока, разумеется, начнёт перетекать вниз. А можно ли двигать банку так, чтобы патока не вытекала даже тогда, когда банка перевёрнута (рисунок 8.5)? Иными словами, можно ли удержать патоку в перевёрнутой банке?

Рис. 8.5: Тряска удерживает патоку от перетекания вниз.

Ответ. Если банку быстро трясти в направлении её оси, то патока не будет вытекать даже после переворачивания.[8] Я воспроизвёл этот опыт, собрав установку из подручных средств, найденных в мастерской и на кухне: при включении электролобзика банка начинала трястись вдоль своей оси. Если всю эту конструкцию перевернуть вверх дном, то патока не вытечет, а чудесным образом останется наверху, как будто сила тяжести изменила своё направление. Удивительным образом тряска удерживает поверхность патоки ровной и не даёт ей течь. Ещё больше впечатляет следующее: если повернуть банку вбок (при работающем лобзике), то поверхность патоки будет оставаться вертикальной, словно это стена воды в расступившемся Красном море.

8.5 Почему праща не может работать

Парадокс. Представьте, что я раскручиваю камень на верёвке, верёвка натягивается и действует на камень силой T. Эта сила направлена прямо к опоре — точке, скажем, P, где мои пальцы держат ве-

[8]Этот эксперимент обсуждается в статье Михаэлиса и Вудварда [14]. Теоретическое обоснование приводит Вольф [26].

рёвку. Следовательно, момент силы[9] T относительно точки P равен нулю. Но нулевой момент силы означает, что момент импульса камня не меняется. То есть $Lv = \text{const}$, где L — длина верёвки, а v — скорость камня, в направлении, перпендикулярном верёвке. Значит, и v не меняется. Однако уже Голиаф убедился, что это не так — где же ошибка?

Ответ. То, что

$$\text{момент силы} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{момент импульса} = \text{const}$$

справедливо в инерциальных системах отсчёта. А система отсчёта, связанная с моими пальцами, вовсе не инерциальна — мне приходится ускорять пальцы при вращении.

Как же работает праща? Ответ можно увидеть на рисунке 8.6. По сути, мы создаём маятник, который всё время скользит вниз по наклонной, *в погоне за ускользающим от него положением равновесия B*. Моя рука — точка подвеса маятника P — движется (скажем) по окружности, всё быстрее и быстрее. Наблюдатель, связанный с точкой P, будет ощущать перегрузку, показанную на рисунке. В частности, он увидит, что камень ускоряется как бы вниз к положению равновесия B, так же как обычный маятник ускоряется вниз к своей нижней точке. При этом точка B постоянно ускользает от камня, двигаясь против часовой стрелки, и камню приходится гнаться за B, всё время разгоняясь.

[9] Обсуждается на странице 152.

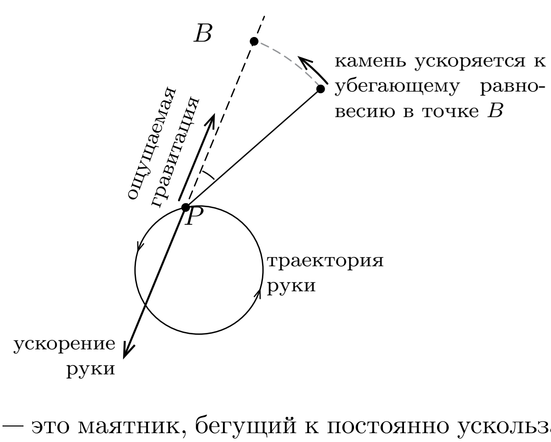


Рис. 8.6: Праща — это маятник, бегущий к постоянно ускользающему положению равновесия.

Следующая задача раскроет другой неожиданный аспект физики пращи.

8.6 Задача Давида и Голиафа

Напомним из предыдущей задачи, что праща — это камень на верёвке, который раскручивают, а затем отпускают.[10] Следующий парадокс возник при попытке разобраться в физике пращи. В ответ может быть трудно поверить.

Задача о праще. Я веду конец верёвки по окружности так, что камень на другом её конце движется по большей концентрической окружности, и при этом угол опережения верёвки по отношению к скорости камня остаётся постоянным, скажем $\theta = 45°$. Камень будет вращаться всё быстрее благодаря касательной составляющей $T_{\text{кас}}$ силы натяжения верёвки. (Придётся и пальцы вращать быстрее, чтобы обеспечить постоянный угол 45°). Предположим, что камень движется по окружности радиуса 1 м. Попробуйте прикинуть, сколько понадобится времени, чтобы разогнать его с начальной скорости 1 м/с до скорости звука (330 м/с)? До скорости света (300,000,000 м/с)?[11]

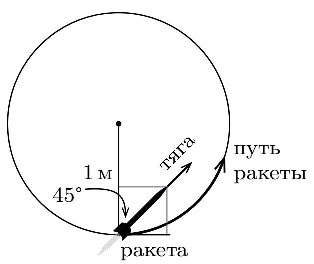


Рис. 8.7: Ускорение прямо пропорционально скорости в квадрате.

Задача о ракете. Игрушечная ракета летит по окружности радиусом 1 м, её двигатели постоянно направлены с опережением под фиксированным углом $\alpha = 45°$ к центру (см. рисунок 8.7).[12] Сколько

[10]Здесь и далее мы пренебрегаем гравитацией.

[11]Притворимся, что ньютоновская механика применима при любых скоростях, так что разрешается двигаться быстрее скорости света. Также не будем учитывать гравитацию и сопротивление воздуха, а также ограничения на прочность верёвки и человеческие возможности.

[12]Это требует постоянно увеличивающейся тяги.

времени понадобится ракете, чтобы увеличить свою скорость с 1 м/с до скорости звука? До скорости света?

Решение. Камень (как и ракета) *превысит скорость света — не говоря уже о скорости звука — менее чем за секунду!* Скорость стремится к бесконечности, когда время приближается к отметке в одну секунду. Это попросту означает, что в принципе невозможно продолжительно раскручивать камень по окружности, поддерживая угол опережения 45° (или любой другой положительный угол). Вот тому объяснение.

Объяснение. Я покажу, что касательное ускорение камня $a_{\text{кас}}$ прямо пропорционально квадрату скорости v — а именно,

$$a_{\text{кас}} = v^2.$$

То есть скорость изменения v прямо пропорциональна v^2. И, как покажут выкладки чуть ниже, такая величина подойдёт к бесконечности за конечное время.

Подсчёт. Так как угол между силой натяжения T и касательной равен 45°, из рисунка 8.7 следует, что касательная и радиальная компоненты силы T равны. То же самое справедливо и для касательного и центростремительного ускорений: $a_{\text{кас}} = a_{\text{цен}}$. Но центростремительное ускорение (см. страницу 158) задаётся формулой

$$a_{\text{цен}} = \frac{v^2}{r} = v^2 \quad (\text{ведь } r = 1\,\text{м}).$$

Значит,

$$a_{\text{кас}} = v^2. \tag{8.3}$$

Теперь начинается матанализ. Сейчас мы покажем, что в силу этого соотношения скорость v достигнет бесконечности за конечное время. Уравнение (8.3) можно переписать как

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dt} = 1. \tag{8.4}$$

Взяв первообразную, получим

$$-\frac{1}{v} = t + c,$$

где $c = -1$, ведь $v = 1$ при $t = 0$. Значит

$$\frac{1}{v} = 1 - t.$$

При $t = 0.9999$ с получаем $v = 10{,}000$ м/с — достаточно, чтобы запустить камень на орбиту Земли и почти достаточно, чтобы преодолеть её гравитацию. При $t = 0.999999$ с скорость превысит скорость света. За какое-то время до 1 секунды кинетическая энергия камня превысит суммарную энергию Солнца и других звёзд Вселенной. Вот вам и реалистичные предположения.

Вопрос. При $t > 1$ мы получаем

$$v = \frac{1}{1-t} < 0,$$

то есть камень будет двигаться назад. Как объяснить такую нелепость?

Ответ. При $t > 1$ формула $v = 1/(1-t)$ попросту не применима.[13]

Чудесный банковский счёт. Мы увидели, что если скорость изменения $\frac{dv}{dt}$ некоторой величины v прямо пропорциональна её квадрату v^2, то v подходит к бесконечности за конечное время. Вообразим на минуту, что банк решает начислять проценты по такому принципу, позволяя балансу v изменяться по этому же закону[14], то есть начисляемые проценты прямо пропорциональны квадрату текущего баланса. Для клиента это было бы прекрасно (а для банка — ужасно). В частности, баланс достиг бы бесконечности за конечное время. Однако если клиент проворонит определённый момент (например, $t = 1$ в нашем предыдущем примере), то баланс станет отрицательным.[15] В математике, прямо как в жизни — внезапно огромное состояние может превратиться в огромный долг: если что-то убегает на $+\infty$ за конечное время, то часто возвращается из $-\infty$.

При этом странном начислении процентов клиенты станут выигрывать от объединения своих счетов. Например, если два равных счёта объединяются в один, то проценты увеличиваются в четыре раза, ведь $(2v)^2 = 4v^2$, то есть доход *каждого* человека удвоится. Это приблизит момент, когда клиенты станут бесконечно богатыми. Обычное, применяемое в банках, экспоненциальное начисление процентов

[13] Напомним, что $v = 1/(1-t)$ решает уравнение $\frac{dv}{dt} = v^2$ при $t < 1$ и $t > 1$, но в момент $t = 1$ правая часть не определена и формула не даёт решения в окрестности 1.

[14] То есть $\frac{dv}{dt} = kv^2$ вместо зависимости $\frac{dv}{dt} = kv$, используемой при обычном непрерывном начислении процентов.

[15] Если считать, что наше решение $v = \frac{1}{1-t}$ продолжается за точку разрыва. Вопрос применимости этой формулы с момента $t = 1$ спорный и должен решаться в суде.

$\frac{dv}{dt} = kv$ является единственно разумным — в частности, клиенты не выигрывают и не проигрывают от объединения своих счетов.[16] И ещё одно замечание: при экспоненциальном начислении ваша прибыль будет той же, независимо от того, в чём мерить баланс: в рублях, копейках или долларах. Но это вовсе не так в случае начисления по закону $\frac{dv}{dt} = v^2$: как только вы убедите банк мерить ваше богатство в копейках, скорость обогащения возрастёт в сотню раз!

8.7 Вода в трубе

Вопрос. Вода течёт по изогнутой трубе, как показано на рисунке 8.8. Подойдя к изгибу, вода, пытаясь продолжать двигаться прямо, давит на трубу в том же направлении, в котором двигалась до поворота; сила указана на рисунке. Верно ли указано направление силы?

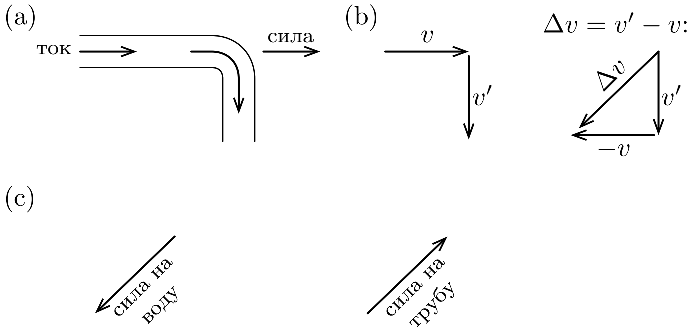


Рис. 8.8: В каком направлении вода действует на трубу в изгибе?

Ответ. Нет, на рисунке сила показана неверно. На самом деле она направлена вверх и вправо, под углом 45° к обоим прямым участкам трубы. Нельзя забывать, что вода поворачивает вниз, и, значит, она обязана толкать трубу вверх. Действительно, посмотрим на изменение импульса частицы воды при прохождении изгиба. Скорость частицы изменилась с v на v' (см. рисунок 8.8). Приращение скорости $\Delta v = v' - v$ идёт по биссектрисе прямого угла, как показано на рисунке. Согласно второму закону Ньютона, средняя сила, действующая на

[16] Иными словами, дифференциальное уравнение, описывающее баланс, является линейным. Для такого уравнения сумма двух решений также является решением. Это означает, что объединённый счёт будет иметь тот же баланс, что и сумма двух счетов, если их вести раздельно.

частицу, направлена вдоль приращения скорости, а согласно третьему закону Ньютона, вода прикладывает к трубе равную по величине и противоположно направленную силу.

Ещё раз чуть по-другому. А вот ещё способ увидеть, что ответ на рисунке 8.8a неверен. Хоть это не вполне строго, но можно считать, что сила, действующая на трубу, складывается из центробежных сил всех частиц на изгибе. Но центробежная сила, действующая на частицу, равна mv^2/r. Тут важно, что скорость v возводится в квадрат; в частности, замена v на $-v$ ничего не меняет. Но если рассуждать как на рисунке 8.8a, то при обратном токе воды сила была бы иной. Значит, вектор скорости на рисунке был указан неверно.

8.8 Натяжение колец

Следующая задача имеет неожиданный ответ, простое решение и ещё более удивительное следствие, описанное на странице 91.

Задача. Два кольца разного радиуса вращаются с той же (линейной) скоростью. Они сделаны из тросиков разной длины, но идентичных во всём остальном. Центробежная сила растягивает оба кольца. Какое кольцо больше натягивается? Будем считать, что тросик идеально гибок и нерастяжим, а внешние силы, включая силу тяжести, отсутствуют.

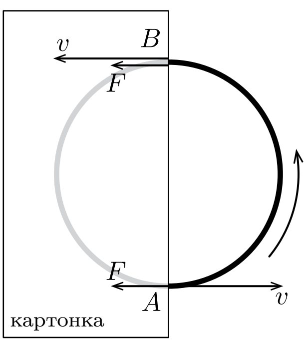


Рис. 8.9: Натяжение тросика.

Ответ. Тросики натягиваются одинаково. Чтобы это увидеть (почти без вычислений), рассмотрим половину кольца (см. рисунок 8.9)

— закроем левую часть картонкой, просто чтобы её не было видно. Мы увидим, что тросик вырастает из точки A и исчезает в точке B с одной и той же скоростью v. Между входом и выходом каждая частица изменяет свою скорость на $2v$. Это изменение вызывается силой натяжения F в точках A и B. Чтобы найти F, подождём время Δt (скоро оно сократится). За время Δt некоторая масса Δm выросла из точки A и та же масса Δm исчезла в точке B. То есть масса Δm изменила скорость на $2v$. По второму закону Ньютона ($F = ma = m\Delta v/\Delta t$) получаем:

$$(2F)\Delta t = \Delta m \cdot (2v), \quad \text{или} \quad F = \frac{\Delta m}{\Delta t} v.$$

Теперь заметим, что $\Delta m = \rho \cdot (v\Delta t)$, где ρ — линейная плотность тросика (масса на единицу длины). Подставив это в последнее выражение, получим

$$F = \rho v^2,$$

так что натяжение действительно не зависит от радиуса окружности — только от v и ρ.

А вот ещё более короткое доказательство того, что натяжение F не зависит от радиуса. Рассмотрим полуокружность и заметим, что сила $2F$ удерживает её центр масс на круговой орбите:

$$2F = \frac{mu^2}{r},$$

где m — масса полуокружности, r — расстояние от центра масс полукольца до центра кольца, а u — скорость движения центра масс. Теперь отметим, что (1) отношение m/r не зависит от радиуса кольца R, ведь и m, и r пропорциональны R; (2) скорость u не зависит от R (а только от v). Следовательно, и F не зависит от R.

8.9 Скользящие тросики в невесомости

Тросики могут вести себя неожиданно. Вот, например, если тросик замкнуть в кольцо[17] и раскрутить (рисунок 8.9), то в условиях невесомости будет сохраняться его круглая форма.

Вопрос. Есть ли другие кривые, кроме окружности, вдоль которых тросик может скользить в невесомости, оставаясь неподвижным как целое? Например, будут ли обладать этим свойством какие-нибудь

[17] Будем считать, что наш тросик идеален: он нерастяжим, не сопротивляется изгибу и очень тонкий. Можно думать о цепочке из маленьких шариков, как на офисных авторучках.

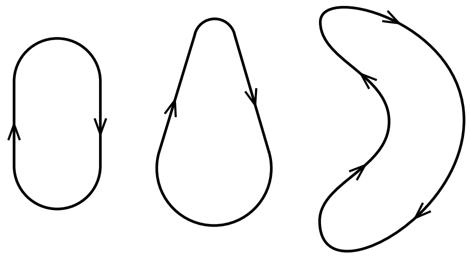


Рис. 8.10: Какие из этих тросиков (если таковые найдутся) не будут меняться, двигаясь в невесомости, если придать их частицам равные начальные скорости вдоль стрелок?

из кривых на рисунке 8.10, если придать частицам тросика равную начальную скорость вдоль кривой?

Иначе говоря, представьте себе абсолютно гибкий шланг, наполненный водой, в котором вода циркулирует без трения. Какие из начальных положений шланга на рисунке 8.10 не будут меняться во времени?

Ответ. В это трудно поверить, но при вышеописанных условиях *любая* гладкая кривая будет сохранять свою форму [22].

Объяснение. Всё станет ясно, если вспомнить, что натяжение *кругового* тросика не зависит от его радиуса (раздел 8.8). Любую кривую можно приблизить кривой, составленной из дуг окружностей разного радиуса. Поскольку натяжение в каждой из этих дуг будет одинаковым, тросик охотно сохранит свою форму.

Более строгое объяснение. Сейчас потребуется немного векторного анализа. Нам надо будет применить второй закон Ньютона к движущемуся тросику. Для этого запараметризуем тросик его длиной s от отмеченной точки. Обозначим через $\mathbf{r}(s,t)$ радиус-вектор частицы с параметром s в момент времени t (рисунок 8.11).

Чуть ниже я покажу, что второй закон Ньютона можно записать как

$$\rho\,\ddot{\mathbf{r}} = (T\mathbf{r}')', \tag{8.5}$$

где точка ($\dot{} = \partial/\partial t$) обозначает производную по времени, штрих ($' = \partial/\partial s$) — производную по s, а $T = T(s,t)$ — натяжение тросика. Поскольку тросик не растяжим,

$$\|\mathbf{r}'\| = 1, \tag{8.6}$$

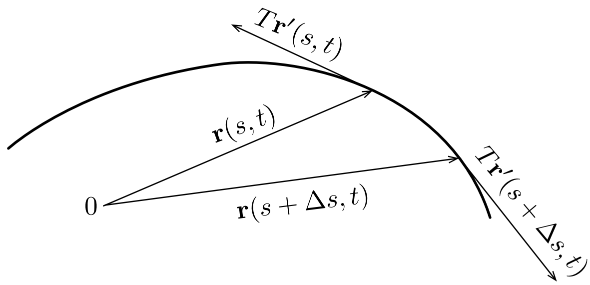


Рис. 8.11: Второй закон Ньютона для движущегося тросика.

где $\|\cdot\|$ обозначает длину вектора. Уравнения (8.5)–(8.6) образуют полную систему для неизвестных функций $\mathbf{r}$ и T. Теперь уже несложно показать, что любое скользящее движение тросика сохраняет форму. Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{R}(s)$ — параметризация кривой длиной её дуги. Если частица начинает движение в точке $\mathbf{R}(s)$ и скользит вдоль кривой со скоростью v, то в момент t она будет находиться в точке $\mathbf{R}(s+vt)$; то есть $\mathbf{r}(s,t) = \mathbf{R}(s+vt)$. Положим $T = \rho v^2$. Тогда, подставив это в (8.5)–(8.6), получим равенства (убедитесь в этом сами). Это и доказывает наше утверждение.

Осталось вывести (8.5). На дугу $(s, s+\Delta s)$ действуют только две силы натяжения на концах. Их равнодействующая равна разнице $(T\mathbf{r}')_{s+\Delta s} - (T\mathbf{r}')_s$, здесь я не указал зависимость от t. Центр масс дуги находится в точке $\frac{1}{\Delta s}\int_s^{s+\Delta s} \mathbf{r}(\sigma,t)d\sigma$. Ускорение центра масс — это вторая производная по времени: $\mathbf{a} = \frac{1}{\Delta s}\int_s^{s+\Delta s} \ddot{\mathbf{r}}(\sigma,t)d\sigma$. Масса дуги вычисляется как $m = \rho\Delta s$, где ρ — линейная плотность, то есть масса тросика на единицу длины. Таким образом, закон Ньютона: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, принимает вид

$$(\rho\Delta s)\cdot\frac{1}{\Delta s}\int\limits_s^{s+\Delta s} \ddot{\mathbf{r}}(\sigma,t)\,d\sigma = (T\mathbf{r}_s)_{s+\Delta s} - (T\mathbf{r}_s)_s. \tag{8.7}$$

Разделив обе части на Δs и устремив $\Delta s \to 0$, получаем (8.5).

Вот ещё несколько любопытных тем/задач для читателей, знакомых с векторным анализом:

1. Покажите, что момент импульса скользящего движения плоского тросика равен $2\rho vA$, где v — скорость, а A — площадь, охватываемая тросиком.

2. Покажите, что z-координата момента импульса скользящего движения пространственного тросика равна $2\rho vA_{xy}$, где A_{xy} — (ори-

ентированная) площадь проекции тросика на плоскость xy. То же верно и для любой прямой и плоскости, перпендикулярной ей.

3. Определим *циркуляцию* тросика как интеграл $\mathcal{C} = \int v_{\text{кас}} ds$, то есть интеграл касательной скорости $v_{\text{кас}}$ по длине кривой s. Покажите, что при *любом* (не только скользящем) свободном движении тросика в невесомости его циркуляция не меняется.

Глава 9

Парадоксы гироскопа

9.1 Волчок и земное притяжение

Как волчок сохраняет равновесие, не используя сил, противодействующих силе тяжести? Ответ довольно хитрый: есть странная *уклоняющая* сила — сила, которая всегда направлена *перпендикулярно* направлению движения оси волчка. Эта сила противостоит неустойчивости: начиная падать, волчок отклоняется в сторону, и в результате движется так, как показано на рисунке 9.3. Чуть ниже я попытаюсь показать, как эту странную «гироскопическую силу» можно вывести из второго закона Ньютона.

Антигравитационное колесо. Будем использовать велосипедное колесо как волчок. Подвесим его на двух верёвках, как показано на рисунке 9.1, и хорошо раскрутим. Теперь перережем одну из верёвок. Удивительно, но неподдерживаемый конец оси не упадёт вниз.[1] Вместо этого колесо начнёт медленно прецессировать. То есть оно продолжит вращаться в почти вертикальной плоскости, и при этом станет медленно поворачиваться вокруг вертикальной оси (см. рисунок 9.2). Причём чем быстрее вращение колеса, тем медленнее происходит прецессия.

Вопрос. Что же мешает колесу упасть? Как ему удаётся противостоять силе тяжести?

Ответ. Можно сказать, что за это отвечает *центробежная сила*, но не та, что первой приходит на ум, а другая — перпендикулярная ей!

[1] Предполагаем, что колесо хорошо раскручено.

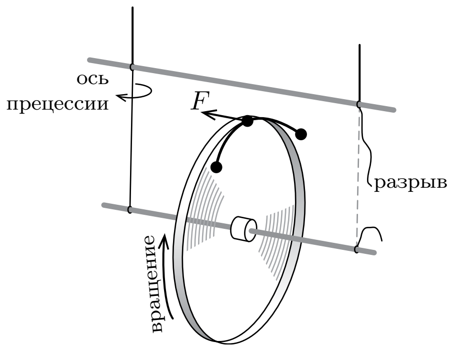


Рис. 9.1: Инерция частиц гироскопа удерживает ось горизонтально после разрыва верёвки.

Давайте посмотрим, что происходит с колесом, когда его ось поворачивается. На рисунке 9.2 показана траектория одной частицы обода вблизи верхней точки колеса. Эта траектория искривлена из-за поворота оси. Повинуясь инерции, частица пытается двигаться прямо, сопротивляясь отклонению с некоторой центробежной силой F, см. рисунок. По тем же причинам сила $-F$ действует на частицу вблизи нижней точки. Получается, что на колесо действует момент фиктивных сил вокруг линии L; именно этот момент и держит ось горизонтально.

Странная сила. Вращающееся колесо демонстрирует пример очень странной силы, напоминающей силу магнитного поля на движущий-

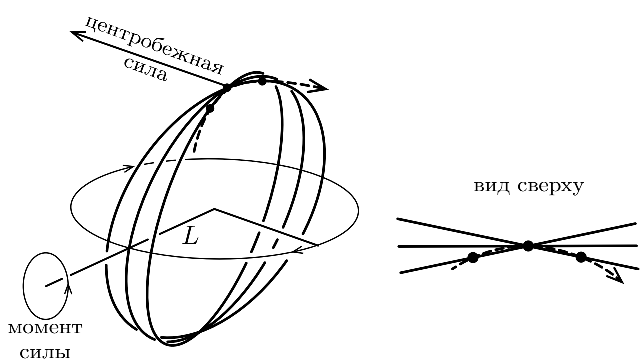


Рис. 9.2: Разбор гироскопического эффекта.

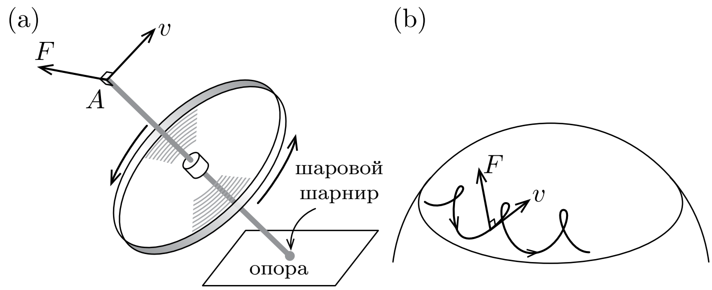


Рис. 9.3: (a) Для поддержания постоянной скорости движения оси надо прикладывать усилие в направлении, перпендикулярном движению. (b) Постоянное уклонение волчка не даёт ему упасть.

ся заряд. В отличие от трения, эта сила направлена *перпендикулярно* направлению движения оси гироскопа. Чтобы выразиться точнее, превратим наше колесо в волчок, закрепив один конец оси на земле, как показано на рисунке 9.3 (этот конец не может скользить, но может поворачиваться во все стороны). Что случится, если попытаться сдвинуть свободный конец A оси? Чтобы не путаться в мелочах, пренебрежём силой тяжести.

Задача. Предположим, что я двигаю конец A оси вращающегося волчка с постоянной скоростью. Куда направлена сила, с которой я действую на A?

Решение. Сила направлена перпендикулярно направлению движения (рисунок 9.3)! Это уже объяснялось при обсуждении велосипедного колеса. Вращающееся колесо даёт странное ощущение: если толкнуть его ось, то она уйдёт под прямым углом к направлению толчка. Как только уловишь это поведение, можно почти без усилий поворачивать ось колеса в любом направлении.

Это напоминает действие магнитного поля на движущийся заряд — сила направлена перпендикулярно скорости заряда.

Кстати сказать, часто реакция людей ортогональна приложенному стимулу, и это очень напоминает гироскопический/магнитный эффект.

Устойчивость за счёт уклонения. Волчок не сопротивляется гравитации, он удерживается в равновесии более хитрым способом. Любое движение оси порождает гироскопическую силу[2], перпендикулярную этому движению, как показано на рисунке 9.3. На этом рисунке видно, что волчок может начинать падать[3], но затем отклоняется от падения вниз. Постоянное действие этой уклоняющей силы приводит к траектории, изображённой на рисунке 9.3. Такой механизм можно назвать «уклончивой устойчивостью».

Энергетические соображения. То, что ось реагирует силой, *перпендикулярной* навязанному движению (рисунок 9.3), объясняется законом сохранения энергии. Действительно, если я перемещаю конец оси с постоянной скоростью v, то я не изменяю энергию вращения гироскопа. Ведь если подшипники идеальны, я никак не могу влиять на скорость вращения. Следовательно, я не совершаю работы, а значит, силе действия приходится быть перпендикулярной к скорости.

9.2 Гироскоп в велосипеде

Современный велосипед прошёл долгий путь технодарвинистской эволюции. Он идеален настолько, насколько таковым может быть творение цивилизации. Научиться ездить на велосипеде гораздо легче, чем объяснить физику этого действия.[4] Следующие две задачи посвящены этому весьма сложному процессу.

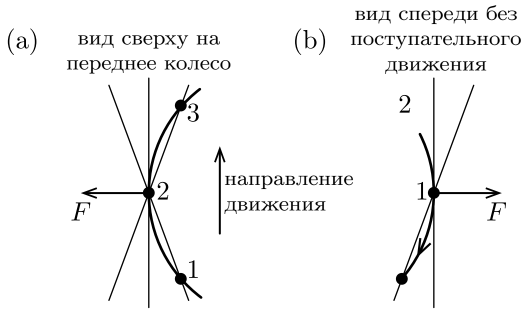


Рис. 9.4: Гироскопический эффект переднего колеса. (a) Поворот колеса вправо наклоняет велосипед влево. (b) Наклон велосипеда влево также поворачивает колесо влево.

[2] Надо разъяснить, что эта сила фиктивная. Когда я говорю «сила», я имею в виду, что волчок ведёт себя так, как если бы на него действовала внешняя сила.

[3] В этот момент ось ускоряется, поэтому рассуждение из предыдущей задачи не применимо. — *Прим. ред.*

[4] Можно сказать, что тело умнее головы.

Вопрос. Я еду на велосипеде прямо и слегка поворачиваю руль вправо. Как на меня повлияет гироскопический эффект от переднего колеса?

Ответ. Он попытается наклонить велосипед влево; это объясняется на рисунке 9.4a.

Вопрос. Теперь я еду на велосипеде без рук по прямой и наклоняю раму влево (скажем, согнувшись вбок). В какую сторону гироскопический эффект будет пытаться повернуть переднее колесо?

Ответ. Тоже влево, как объясняется на рисунке 9.4b.[5]

9.3 Как катится монета?

Устойчивость катящейся монеты похожа на чудо. Создаётся впечатление, что монета разумна или, по крайней мере, обладает рефлексом опытного моноциклиста (уж точно она справляется лучше неопытного). Случайные неровности поверхности ей не помеха — она легко под них подстраивается; она умудряется устоять даже после лёгкого толчка. Без каких-либо подвижных частей монета воплощает предельную простоту; но как же объяснить её рефлексы? Как безмозглый кусок металла умудряется управлять своим движением, удерживаясь на тонкой грани между падением влево и вправо?

Следующая задача чуть приблизит нас к ответу. Но даже разобравшись, как всё устроено, меня не перестаёт удивлять ловкость и естественность, с которой монета катится по столу. Несмотря на объяснение (которое скоро будет дано), кажется счастливой случайностью, что гироскопический эффект *помогает* монете устоять, а не упасть. Более всего восхищает контраст между устойчивостью монеты и отсутствием у неё мозгов.[6]

Задача. Если монета катится вперёд с уклоном вправо, как показано на рисунке 9.5, то её траектория поворачивает тоже вправо. Из-за этого счастливого совпадения монета не падает. Похоже, что монета умна — наклонившись вправо, она реагирует как наклонившийся велосипедист, поворачивая вправо, и тем самым избегая падения. Почему же монета поворачивает в сторону своего наклона?

[5]То, что гироскопический эффект пытается повернуть колесо влево, не означает, что оно туда и повернётся, ведь есть и другие силы, влияющие на колесо. — *Прим. ред.*

[6]В том же смысле некоторые люди восхищают не меньше.

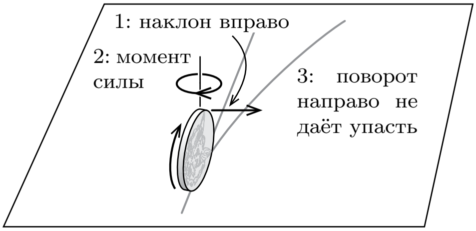


Рис. 9.5: Гироскопический эффект подправляет движение катящейся монеты, предотвращая её падение. Из-за наклона (1) сила тяжести создаёт гироскопический момент (2), который заставляет монету поворачивать (3).

Решение. Когда монета катится вперёд с наклоном вправо, она начинает падать (рисунок 9.5). Это падение — то есть рост её наклона — вызывает гироскопический момент (объясняется далее; см. также страницу 95), который подворачивает монету, а значит, и её траекторию, вправо; эта поправка и предотвращает падение. Для понимания механизма происходящего вообразим, что монета движется прямо, продолжая всё больше наклоняться. В системе отсчёта, движущейся вместе с монетой, мы бы наблюдали изгиб траекторий частиц на её ободе, как показано на рисунке 9.2, и возникающая при этом центробежная сила пыталась бы повернуть монету вправо.

Приведённое рассуждение говорит лишь, что монета может не упасть; оно вовсе не доказывает, что монета не упадёт. Откуда нам знать, например, что этого самокорректирующего эффекта хватит, чтобы удерживать монету? А может, и наоборот: этот эффект окажется слишком сильным, вызывая нестабильный колебательный процесс? Конечно же, чтобы сохранять равновесие, монета должна катиться достаточно быстро. Подробное обсуждение устойчивости катящейся монеты приводится на страницах 58—67 *«Динамики неголономных систем»* Неймарка и Фуфаева [19].

9.4 Как удержаться на скользком куполе?

Задача. Может ли твёрдое кольцо удержаться от соскальзывания вниз с идеально скользкого сферического купола, даже если разрешается слегка подтолкнуть кольцо (рисунок 9.6)? Установить кольцо точно наверху не получится, ведь малейший толчок заставит его соскользнуть. Использование внешних опор (включая магнитные и иже с ними) не разрешается.

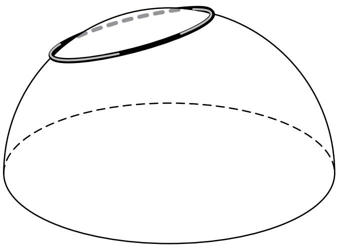


Рис. 9.6: Как не соскользнуть с идеально скользкого купола?

Решение. Надо поместить кольцо на купол, хорошо раскрутить и отпустить. Если кольцо вращается достаточно быстро и расположено почти наверху, то оно не соскользнёт, а будет двигаться так, как показано на рисунке 9.7d.[7]

Почему это сработает. Можно думать, что наше кольцо на сфере — это волчок: колесо с длинной осью, вращающееся на шарнире (рис. 9.3a, страница 97). Представьте себе, что вместо того чтобы строить идеально скользкую сферу (что очень непросто), мы прикрепим кольцо к концу стержня невесомыми спицами. Получится велосипедное колесо на длинной оси. Конец оси опирается на стол или прикреплён к сферическому шарниру без трения. Таким образом, положение кольца будет ограничено невидимой сферой. Итак, кольцо на сфере — это волчок.[8] Остаётся вспомнить, что волчок не падает, если его раскрутить достаточно быстро. Читатель может обратиться к объяснению на странице 95 или читать дальше.

Прямое объяснение. Как только кольцо отпускают, оно начинает скользить вниз. Поэтому, если смотреть из системы отсчёта, связанной с центром кольца, оно будет поворачиваться, как показано на рисунке 9.7b. Этот поворот вызывает искривление траекторий частиц кольца — например, траектории 1—2—3. В силу инерции частица сопротивляется этому искривлению центробежной силой F, перпендикулярной к плоскости кольца. Диаметрально противоположная частица кольца создаёт такую же по величине, но противоположно

[7] Мы считаем, что трения нет вовсе. Иначе кольцо стало бы замедляться и соскальзывать.

[8] Чтобы аналогия с волчком стала полной, придётся предположить, что кольцо не может отрываться от поверхности купола (хотя на самом деле такое может произойти). Для этого можно считать, что кольцо удерживается на сфере какой-то силой, например, магнитной.

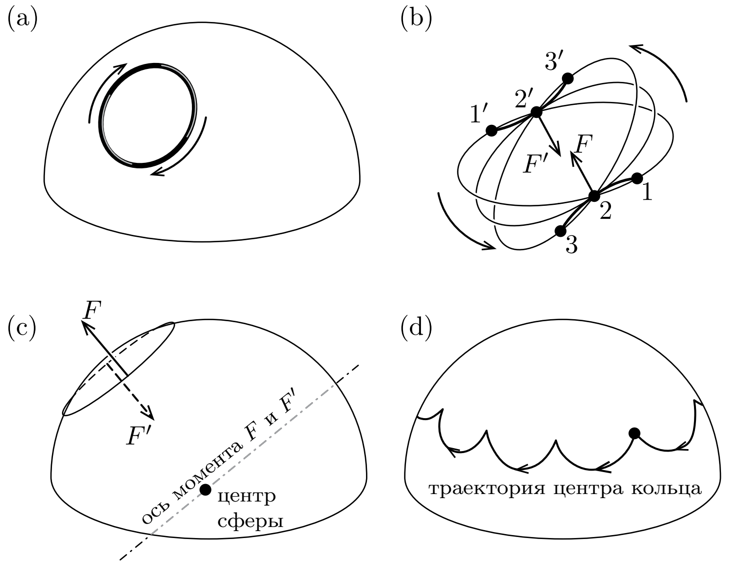


Рис. 9.7: Почему кольцу удаётся не соскользнуть вниз.

направленную силу F'. Эти две силы создают момент (рисунок 9.7c). (Я рассмотрел только две частицы, но остальные суммарно создают такой же эффект.) Этот гироскопический момент заставляет кольцо отклоняться от направления своего движения, и ось кольца будет двигаться так, как показано на рисунке 9.7d.

Именно так это и работает: не сопротивление падению, а уклонение от него!

Чтобы развить физическую интуицию, представьте себя скользящим на пузе по большой сфере, при этом быстро крутясь колесом (как при выполнении акробатического колеса).

9.5 Как найти север с помощью гироскопа

Вопрос. Как найти направление на географический север, используя гироскоп? Считаем, что у вас идеальный гироскоп, без трения, способный вращаться вечно.

Ответ. Если установить гироскоп горизонтально на плотик, который плавает в ёмкости с водой, то ось гироскопа медленно повернётся точно по меридиану! При этом направление на север будет то, в которое гироскоп вкручивается по правилу правого винта, то есть если думать, что ось — это винт, то она будет вкручиваться в направлении севера. Иными словами, гироскоп пытается как можно лучше выровнять своё вращение с вращением Земли, принимая во внимание, что его ось должна оставаться горизонтальной.

Почему же гироскоп ищет север? Для простоты разместим нашу установку на экваторе (рисунок 9.8). Она будет вращаться вместе с Землёй, и можно считать, что ось вращения (показана пунктиром) идёт с севера на юг. Предположим, что ось гироскопа изначально направлена в каком-то другом направлении — скажем, вдоль линии восток—запад, как на рисунке. Вращение Земли толкает ось гироскопа вдоль стрелок (A); гироскоп же отвечает поворотом в направлении (B). Гироскоп ведёт себя ровно так, как объяснялось на странице 97: если толкнуть его ось, то он отреагирует движением в перпендикулярном направлении. В итоге ось плавающего гироскопа ориентируется вдоль меридиана, как показано на рисунке.

Больше свободы. Вместо того чтобы помещать гироскоп на плотик, можно оставить его ось несвязанной, установив гироскоп на карданном подвесе или погрузив его в жидкость так, чтобы он имел нейтральную плавучесть. Тогда гироскоп будет постепенно выравниваться по оси Земли. А угол его оси с горизонтом укажет широту!

В итоге, независимо от способа подвеса, гироскоп пытается по возможности согласовать своё вращение с вращением Земли.

Задача. Почему подвешенный гирокомпас выравнивает свою ось по оси Земли? (Подсказка: трение заставляет гироскоп переориентироваться.)

Независимость гирокомпаса от магнитных аномалий даёт много преимуществ, особенно на стальном корабле. Кроме того, он указывает на географический, а не магнитный полюс.

Немного истории.[9] Гирокомпас был запатентован в 1908 году Э. А. Сперри, автором множества других изобретений. На счету у Сперри больше 400 патентов, но гирокомпас, пожалуй, самый известный. Его гирокомпас сыграл заметную роль в Первой мировой войне. После смерти Сперри в его честь был назван корабль ВМС США (плавбаза подводных лодок). Этот корабль был спущен на воду через десять дней после нападения на Перл-Харбор, а после долгой службы,

[9] Больше подробностей о гирокомпасе можно найти в статье Википедии.

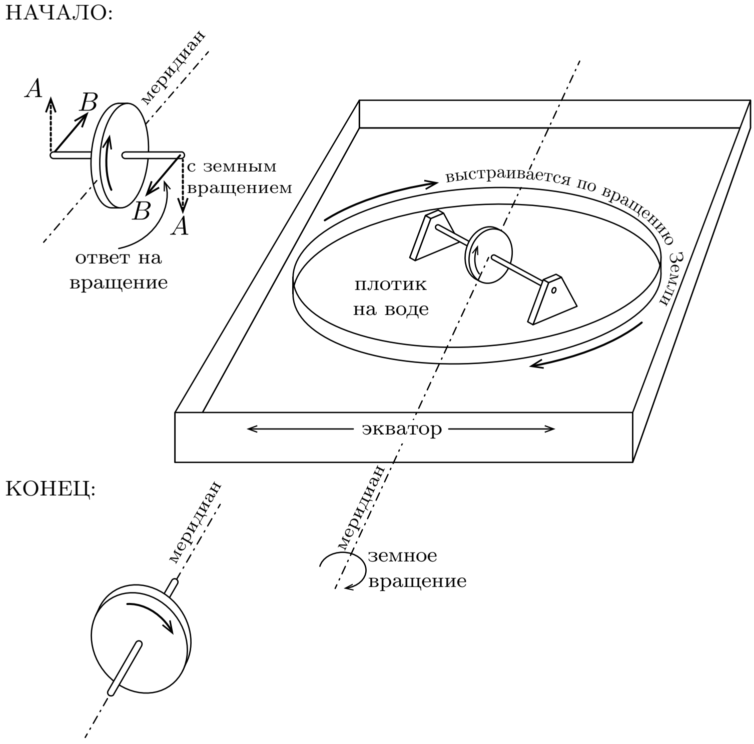


Рис. 9.8: Как работает гирокомпас.

завершившейся в 1982 году, его перевели в музей. Гирокомпас Сперри используется на кораблях и по сей день.

Ещё в 1916 году, в разгар Первой мировой войны, Сперри и Питер Хьюитт изобрели БПЛА — самолёт-дрон. Сперри пророчески назвал его «бомбой будущего». В конце войны Сперри и Хьюитт в длинной череде проб и ошибок пытались создать на основе этой идеи работающее оружие. Лоуренс Сперри, сын изобретателя, принимал участие в этих испытаниях и несколько раз чуть не погиб во время тестовых полётов.

Глава 10

Горячее и холодное

10.1 Может ли холодное нагреть горячее?

Вопрос в заголовке, конечно же, имеет отрицательный ответ: при контакте двух тел тепло переходит от горячего к холодному.[1] Поэтому даже спрашивать следующее кажется глупым:

Задача. Можно ли, используя стакан воды, нагретый до 100 °C, нагреть стакан молока с начальной температурой 0 °C до температуры выше, чем 50 °C, то есть их общей температуры при смешивании? Будем считать, что стаканы одного размера, а вода идентична молоку по всем тепловым свойствам.[2] Тепло не поступает извне, *но разрешается использовать дополнительные сосуды.*

Решение. Это можно проделать, не нарушая второй закон термодинамики. Для этого нам понадобится ещё один пустой стакан и крохотный ковшик. Зачерпнём ковшик холодного молока, опустим его в горячую воду и подождём, пока температура не уравновесится. Перельём содержимое ковшика в пустой стакан. Будем это повторять, пока всё молоко не окажется в третьем стакане. По пути в третий стакан каждая порция молока получает немного тепла от воды. Я утверждаю, что после всех этих переливаний молоко станет теплее воды. Действительно, когда *последний ковшик* молока вытаскивается из воды, у молока в ковшике та же температура, что у воды, а все предыдущие порции нагревались сильнее. Значит, молоко в третьем

[1] Этот экспериментально установленный принцип является следствием второго закона термодинамики.

[2] В частности, у них одинаковые удельные теплоёмкости. То есть одинаковое количество тепла одинаково изменяет температуру у равных масс воды и молока.

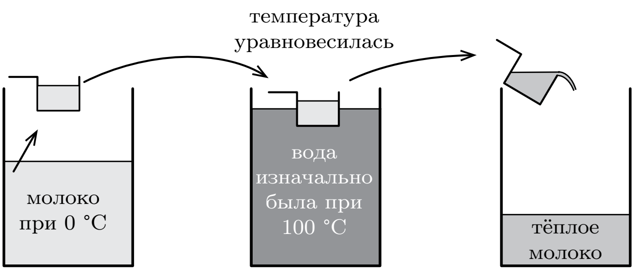


Рис. 10.1: В стакане N ковшиков, и каждый ковшик молока при 0° охлаждает воду в $1 + 1/N$ раз.

стакане теплее воды, и оно останется теплее даже после добавления последнего ковшика.

Приготовление лосося и число Эйлера *e*. Мы увидели, что этот метод нагревает молоко до температуры выше 50 °C — но насколько именно? Если ковшик достаточно мал, то молоко нагреется приблизительно до 63 °C — можно обжечься; кроме того, это рекомендованная температура, до которой следует прогревать филе лосося при приготовлении.

Математику покажется занятным, что предельно достижимая температура воды при этом методе равна

$$\frac{100^\circ}{e},$$

где $e = 2{,}718\ldots$ — число Эйлера, то есть предел последовательности $(1 + 1/N)^N$ при $N \to \infty$.

Чтобы это обосновать, давайте считать, что стакан вмещает N ковшиков, где N — целое число. Стакан воды при температуре T и ковшик холодного молока при 0° придут в тепловое равновесие при температуре

$$\frac{T}{1 + 1/N}.$$

Действительно, при добавлении одного холодного ковшика к N тёплым весь запас тепла N ковшиков равномерно распределяется между $N + 1$ ковшиками. Следовательно, в расчёте на один ковшик тепло уменьшается в $\frac{N+1}{N} = 1 + 1/N$ раз. Значит, и температура уменьшается в то же число раз. Таким образом, для температуры T_k воды после k-го шага выполняется рекуррентное соотношение:

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{1 + 1/N}, \qquad \text{при} \qquad T_0 = 100^\circ.$$

Во время всей процедуры исходная температура $T_0 = 100^\circ$ делилась на одну и ту же величину N раз, и в конце вода охлаждается до

$$T_N = \frac{100^\circ}{(1+1/N)^N} \approx \frac{100^\circ}{e}.$$

Температура тела. При достаточно большом N получим, что $(1+ + 1/N)^N \approx e = 2{,}718\ldots$, и, значит,

$$T_N \approx \frac{100^\circ}{e} \approx 36{,}8^\circ.$$

Эта температура подозрительно близка к температуре человеческого тела. Если вдруг нужно вычислить e в экстренной ситуации и под рукой есть градусник, то можно измерить свою температуру в градусах Цельсия и подставить её в соотношение

$$\frac{100^\circ}{T_{\text{человек}}} \approx e.$$

(Если у вас жар, то оценка получится заниженной, а если гипотермия, то завышенной.) Получается, что человеческая натура связана с натуральным логарифмом (тем самым, что берётся по основанию e).

Раз уж пошла речь о совпадениях, напомню, что температура человеческого тела связана с оптимальной температурой для приготовленного лосося (63°):

$$T_{\text{человек}} + T_{\text{лосось}} \approx 100^\circ.$$

Ещё теплей. Оказывается, что можно добиться почти идеального обмена температурами двух жидкостей — по крайней мере, в теории. Для этого нужно мелко дробить обе жидкости, а не только молоко. Практически это можно реализовать, пропуская воду и молоко в противоположных направлениях через две трубки, находящиеся в тесном тепловом контакте, как на рисунке 10.2. Если прокачивать молоко слева, а воду справа, то мы получим почти идеальный обмен теплом. Это простое устройство называется (противоточным) теплообменником.

Теплообменники используются в природе. Например, ими снабжены наши руки — кровь глубоких вен идёт противотоком с кровью артерий. В холодных условиях холодная кровь от кистей возвращается по этим венам, получая тепло от идущей наружу артериальной крови. Согретая поступающая кровь помогает поддерживать температуру тела. При этом охлаждённая артериальная кровь, направляющаяся к конечностям, уже не отдаёт так много тепла наружу. При

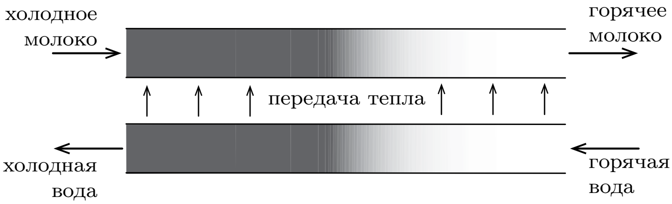


Рис. 10.2: Противоточный теплообменник обеспечивает почти полный обмен температурами.

жаре этот механизм отключается: кровь идёт по поверхностным венам, помогая рассеивать избыточное тепло.

Теплообменниками снабжены собаки, овцы, верблюды и многие другие животные. Они помогают поддерживать температуру мозга ниже остального тела: более холодная венозная кровь изо рта и носа охлаждает артериальную кровь, питающую мозг (наиболее уязвимый к перегреву орган). Кролики, у которых нет такого механизма, рискуют погибнуть от перегрева, если в жаркую погоду их долго преследует собака. Теплообменниками покрыта вся поверхность языка серых китов (язык нельзя утеплить слоем жира). И этот механизм не ограничивается млекопитающими: некоторые рыбы, например тунец, используют противоточные теплообменники, чтобы поддерживать температуру мышц на целых 14 °C выше температуры воды.

10.2 Насос и молекулярный пинг-понг

Вопрос. Можно заметить, что насос нагревается, когда вы накачиваете шину велосипеда. Происходит ли это нагревание только из-за трения, или есть другие причины?

Ответ. Основная причина не в трении. Воздух нагревается при сжатии, и уже он нагревает стенки насоса.

Вопрос. А почему сжатие нагревает воздух?

Ответ. Если вы решите сыграть в пинг-понг или теннис, то ответ окажется в ваших руках. Ракетка, ударяющая по летящему мячику, подобна движущемуся поршню насоса, подталкивающего молекулу воздуха. Благодаря движению ракетки шарик после удара приобретает бóльшую скорость (см. рисунок 10.3). (Прибавка скорости равна удвоенной скорости ракетки. Предполагается, что столкновение совершенно упругое и масса шарика мала по сравнению с массой ракетки.)

Точно так же и молекулы, отталкиваясь от поршня, ускоряются,

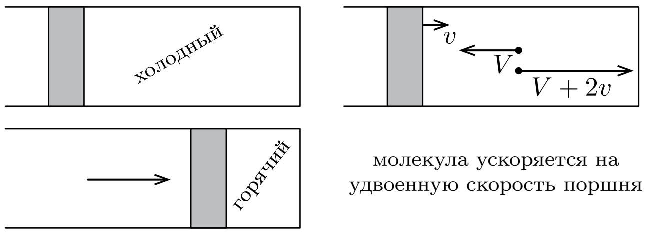


Рис. 10.3: Молекула ускоряется на удвоенную скорость поршня.

вследствие чего нагреватся воздух. На рисунке 10.4 показано, как меняется температура воздуха внутри насоса. Согласно графику, сред-

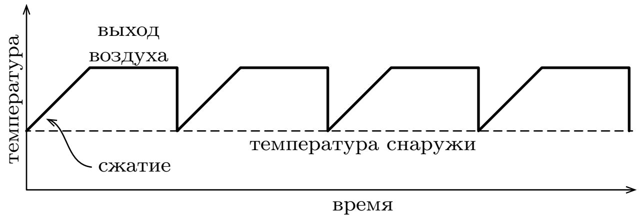


Рис. 10.4: Зависимость температуры в насосе от времени.

няя температура в насосе выше, чем снаружи. При этом стенка насоса нагревается до некоторого среднего значения.

10.3 Теплонасос из велонасоса

Теплонасос — это холодильник, которым пользуются для нагрева. Холодильник перекачивает тепло изнутри наружу. Если холодильник называют теплонасосом, то всего лишь хотят сказать, что он используется для нагрева, а не охлаждения, однако эти две функции неотделимы друг от друга.

Вопрос. Можно ли использовать велонасос как теплонасос, то есть перекачивать тепло из холодной зимней стужи внутрь тёплого помещения при помощи обычного велосипедного насоса? Меня интересует лишь такая возможность в принципе, решение не обязано быть практически реализуемым.

Ответ. Насос с закрытым выходным отверстием — это просто цилиндр с поршнем, наполненный воздухом (см. рисунок 10.3). Поместим насос снаружи, не сжатый и холодный. Затем надавим на поршень достаточно сильно, чтобы сжатый воздух нагрелся выше комнатной температуры (сжатие вызывает нагрев). Далее занесём насос внутрь, чтоб он отдал часть тепла помещению. Как только его температура сравняется с температурой комнаты, вытащим его наружу и расслабим поршень. Расширяющийся воздух станет холоднее уличного воздуха, ведь он отдал часть своего тепла помещению. Охладившись, воздух в насосе будет втягивать тепло из холодного зимнего воздуха! Это тепло компенсирует то, которое мы передали воздуху внутри. После того как насос снова достигнет наружной температуры, цикл завершается, и его можно повторять, пока не надоест.

Настоящие теплонасосы устроены хитрей, но принцип работы тот же. Вместо воздуха в них используют хладагент[3]; сжатие и расширение заменяются конденсацией и испарением хладагента. Хладагент перекачивается по трубам, и нет нужды бегать с ним туда-сюда.

Эффективность. Удивительно, что для получения того же количества тепла теплонасосу требуется меньше энергии, чем, скажем, обычному электронагревателю. Это происходит потому, что часть работы, затраченной на сжатие, возвращается, когда я снова выношу насос наружу и отпускаю поршень; то есть поршень возвращает часть энергии, которую я потратил на его сжатие.

10.4 Две комнаты

Вопрос. Одна из двух одинаковых комнат в доме теплее другой. Верно ли, что у молекул воздуха в тёплой комнате суммарная кинетическая энергия больше, чем в холодной?

Ответ. Энергия одинакова![4] У воздуха в тёплой комнате средняя энергия молекулы выше, чем в холодной, однако в тёплой комнате меньше молекул, так как нагретый воздух расширяется, и какая-то

[3] например, один из фреонов — *Прим. ред.*

[4] Я предполагаю, что воздух является идеальным газом, и не учитываю вторичные эффекты, такие как расширение стен при нагревании и невозможность поддерживать одинаковую температуру во всей комнате.

его часть просачивается в щель под дверью. Эти два противоположных эффекта (молекулы быстрее, но их меньше) уравновешивают друг друга. Действительно, число молекул в комнате обратно пропорционально температуре T (считая от абсолютного нуля), тогда как кинетическая энергия каждой молекулы прямо пропорциональна T. Чуть ниже мы разберём всё это подробней.

Подробное объяснение. Согласно уравнению состояния идеального газа (достаточно хорошее приближение при рассматриваемых температурах),

$$pV = NkT, \tag{10.1}$$

где p — давление в комнате, V — объём комнаты, T — абсолютная температура воздуха, N — число молекул в комнате, а k — постоянная, не зависящая от перечисленных величин (она называется постоянной Больцмана).

С другой стороны, известно, что средняя кинетическая энергия E молекулы прямо пропорциональна температуре газа: $E = (3k/2)T$. Поэтому полная кинетическая энергия всех N молекул в комнате равна

$$E_{\text{полная}} = NE = N\tfrac{3k}{2}T = \tfrac{3}{2}NkT \overset{(10.1)}{=\!=\!=} \tfrac{3}{2}pV.$$

При нагревании комнаты и давление p, и объём V остаются постоянными, и, значит, постоянной остаётся и $E_{\text{полная}}$, что и требовалось.

10.5 Как морозить велосипедной шиной

Вопрос. Как достичь температуры ниже нуля в жаркий летний день, используя велосипедную шину?

Ответ. Надо просто открыть ниппель в накачанной шине. Допустим, что шина надута до 3 атмосфер. Это означает, что давление внутри шины на 3 атмосферы больше, чем снаружи, то есть давление в шине 4 атмосферы. При выходе из шины воздух значительно расширяется, ведь давление падает с 4 до 1 атмосферы. В свою очередь, расширение вызывает охлаждение. При таком падении давления абсолютная температура воздуха уменьшается процентов на сорок. Начав с температуры 27 °C ≈ 300 K, мы получим 171 K ≈ −102 °C! Здесь не учитывается нагрев за счёт вязкости при прохождении через узкое отверстие, но, как ни крути, температура опустится ниже нуля.

Вычисления. Рассмотрим небольшую область воздуха, которая за очень короткое время перемещается из шины наружу. Поскольку всё происходит быстро, можно пренебречь теплообменом с окружающим воздухом. Для такого расширения без теплообмена (называемого *адиабатическим расширением*) температура воздуха пропорциональна давлению в степени[5] 2/5:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{5}},$$

где индексы при температуре T и давлении p обозначают начальные и конечные состояния. Мы знаем, что $p_2/p_1 = 1/4$. Возведя это в степень 2/5, получаем примерно 0,57. Если начать с $T_1 = 300\,\mathrm{K}$, температура понизится до

$$T_2 = 300 \cdot 0{,}57 \approx 171\,\mathrm{K},$$

что соответствует примерно $-102\,^\circ$C! Таким образом, открывая ниппель, мы получаем самое холодное место на Земле (не считая криогенных лабораторий). Конечно же, это место очень маленькое и существует оно очень недолго, но всё же этим можно гордиться.

[5] Здесь воздух считается одноатомным идеальным газом, хотя было бы точнее считать его двухатомным; тогда степень была бы 2/7. Но и в этом случае температура опустится ниже точки замерзания. — *Прим. ред.*

Глава 11

Пара вечных двигателей

Вечный двигатель — это утопическая мечта, и она притягивает к себе чудаков. К счастью, в отличие от многих социальных утопистов прошлого (и настоящего), эти не опасны; они редко убивают ради идеи. Общее для всех утопий — это попытка нарушить какой-нибудь закон, будь то закон сохранения энергии, закон экономики, закон человеческой психологии или закон общества.

Изобретателям вечного двигателя нужно обладать безграничным умом, ведь надо справиться с бесконечно трудной задачей — изобрести невозможное. Такие люди бывают умны, но мудрых среди них немного.

Два вечных двигателя этой главы — это головоломки, в каждой из которых требуется найти изъян.[1]

11.1 Капиллярная тяга

Вода поднимается в тонкой трубочке благодаря капиллярному эффекту, см. рисунок 11.1. А можно ли как-то использовать работу поднимающейся воды? ведь она могла бы тянуть что-то за собой. К сожалению, этот двигатель останавливается, как только вода достигает определённой высоты. Сейчас я предложу способ обойти эту проблему.

Давайте вставим поршень в тонкую замкнутую трубку и добавим каплю воды вплотную к поршню так, чтобы между водой и порш-

[1]Вскоре после Галилея разоблачать ложные теории физики стало довольно безопасно. В экономике это случилось гораздо позже. В Советском Союзе, приблизительно в 1947 году, мой знакомый получил 12 лет за устные рассуждения в классе экономики о том, что стремление к прибыли может быть необходимым условием хорошо работающей экономики.

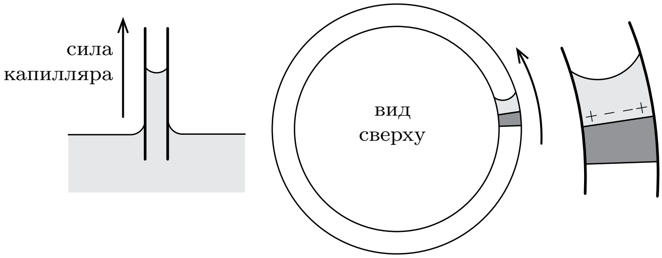


Рис. 11.1: Вечный двигатель на капиллярной тяге.

нем не было пузырьков (см. рисунок 11.1). Поршень может скользить практически без трения. Положим трубку горизонтально на стол, чтобы не приходилось бороться с силой тяжести. Теперь капиллярный эффект будет тянуть поршень по трубке, и нет ничего, что остановило бы его движение; то есть ему придётся двигаться бесконечно. Чтобы всё работало, надо только добиться, чтобы сила трения поршня была меньше тянущей его капиллярной силы. Так мы получим бесконечный источник энергии, не требующий топлива, ведь при малом, но ненулевом трении выделяется тепло.

Вопрос. Если это не первый в мире работающий вечный двигатель, то в рассуждении должно быть что-то не так. Попробуйте найти, где именно ошибка. (Она вовсе не в реализации поршня с малым трением.)

Ответ. Проблема не в отсутствии хорошей смазки, она серьёзнее. Сначала разберёмся, как вода поднимается в капилляре. Это происходит по двум причинам: (1) из-за поверхностного натяжения: особенности расположения молекул воды заставляют её поверхность вести себя подобно натянутой резиновой плёнке; (2) наличие электростатического притяжения воды к стенкам трубки. Электростатическое притяжение притягивает воду к стенке трубки, из-за чего поверхность воды принимает вогнутую форму мениска. Тут же включается поверхностное натяжение: стремясь выпрямить вогнутую поверхность, оно тянет за собой водяной столб. Эти два процесса — растекание вдоль стенки и подтягивание — происходят одновременно, и вода поднимается пока сила тяжести не уравновесит капиллярный эффект.

Теперь вернёмся к нашему двигателю. Капиллярный эффект всё ещё присутствует: вогнутый мениск по-прежнему тянет воду, пытаясь тащить за собой поршень. Но что происходит рядом с поршнем? Сейчас выяснится, что там возникает ровно противоположный эффект, который сводит на нет всю идею. Из-за электростатического притяжения давление воды у стенок оказывается выше, и, в частности, оно выше возле поршня. Это дополнительное давление толкает поршень в противоположном направлении. Именно этот противодействующий эффект и был упущен.

11.2 Вечный двигатель из эллиптического отражателя

Об этой задаче я узнал от Петера Унгара в середине 1970-х годов. Она основана на прекрасном свойстве эллиптических зеркал: любой луч света, исходящий из одного фокуса эллипса, после отражения[2] пройдёт через другой его фокус. Следующий вечный двигатель использует это свойство.

Идея теплопередачи. Внутренняя поверхность эллипсоидальной оболочки (рисунок 11.2) представляет собой идеальное зеркало. В

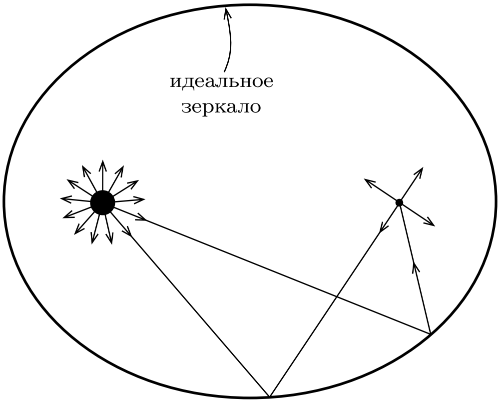


Рис. 11.2: Излучение шаров в фокусах идеально отражается эллипсоидальным зеркалом.

двух фокусах помещены два шара разного радиуса, находящиеся при одной и той же температуре T. Оба наших шара излучают (как и любое тело с температурой выше абсолютного нуля). Из двух шаров

[2]Предполагается, что поверхность отражает идеально.

при одинаковой температуре больше энергии излучает больший (если предположить, что они сделаны из одного и того же материала и имеют одинаковый цвет). Так как каждый луч, исходящий из одного фокуса, после отражения проходит через другой, все лучи от большего шара попадают на меньший, и наоборот. Отсюда следует, что при равной температуре большой шар отдаёт больше тепла, чем получает, и поэтому маленький будет нагреваться, а большой — охлаждаться. Разность температур можно использовать, чтобы приводить в действие двигатель[3], так что наше устройство обеспечивает вечный источник энергии.

Вопрос. Где же ошибка?

Ответ. Не всякий луч, исходящий от большего шара, попадёт на меньший. Некоторые вернутся обратно к большому; это относится, например, к лучам, исходящим из большого шара влево, как на рисунке 11.2. Но ещё важнее то, что лучи исходят с поверхности тела во всех направлениях, а не только радиально, и такие нерадиальные лучи не проходят через фокусы. Это и разрушает исходное рассуждение.

[3]Например, она может вызывать движение воздуха, которое можно использовать для вращения колеса.

Глава 12

Парус и крыло

Вопрос. Можно ли в безветренный день двигаться под парусом по реке?

Ответ. Да, парус работает без ветра благодаря течению; см. рисунок 12.1. В неподвижном воздухе парус движется, как нож в масле; он рассекает воздух, двигаясь вдоль своей плоскости. А вот киль толкается течением, и поэтому лодка может плыть, например, под прямым углом к берегу, как это показано на рисунке. Можно думать, что киль играет роль паруса, а текущая вода — роль дующего ветра, сам же парус, рассекая воздух, ведёт себя подобно килю! Получается обычное движение под парусом, только вверх ногами.

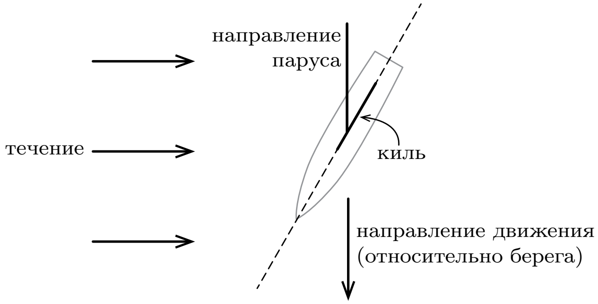


Рис. 12.1: Когда воздух неподвижен, парус и воздух меняются ролями с килем и водой.

Симметрия паруса и киля. Мы только что рассмотрели лодку с точки зрения наблюдателя с берега. Но представьте себя в лодке: вода будет казаться вам неподвижной, а ветер, наоборот, будет дуть вверх по течению. То есть для вас это будет обычное плавание: лодка идёт под парусом при ветре. Ваш парус будет ловить ветер, как обычно, и киль, как обычно, рассекать воду. Получается, что парус и киль меняются ролями в зависимости от системы отсчёта! В этом отношении у паруса и киля равные права.[1]

Задача. В каких направлениях может двигаться лодка по реке? Считаем, что воздух неподвижен, а река течёт.

Решение. В обычной ситуации (когда течения нет, а ветер дует) лодка может идти во всех направлениях, за исключением направлений почти против ветра. Но наша лодка на реке находится в точно такой же ситуации, только киль меняется ролями с парусом. Поэтому парус (а значит, и лодка) может двигаться во всех направлениях, за исключением направлений почти против течения.

12.1 Вишнёвые косточки и паруса

Есть вишенки и стрелять друг в друга косточками — неиссякаемый источник детских радостей. Как мы знаем, чтобы стрельнуть косточкой, надо сжать её между пальцами и выпустить в нужном направлении.

Вопрос. Чем похожа сила, разгоняющая вишнёвую косточку, на силу, движущую парусную лодку?

Ответ. На рисунке 12.2a ветер и течение противоположно направлены и их скорости равны, а парусная лодка движется перпендикулярно их направлениям. Обратите внимание, что ветер и течение подобны двум пальцам, которые раздвигают парус и киль изнутри, как показано на рисунке 12.2b. Эти пальцы расходятся, заставляя лодку плыть в направлении стрелки. По сути то же самое происходит, когда мы стреляем косточкой, только пальцы раздвигаются, а не сжимаются.

[1] На самом деле есть одно различие: киль выровнен по корпусу, а парус — нет. Удобней считать киль с корпусом единым целым и думать, что лодка состоит из двух частей: (1) киль+корпус и (2) парус.

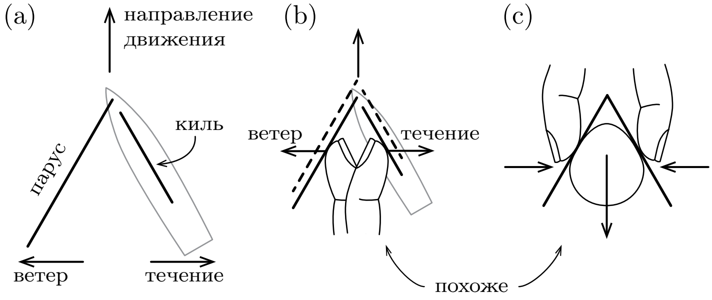


Рис. 12.2: (a, b) Ветер и течение стараются раздвинуть клин между парусом и килем, заставляя лодку скользить в направлении стрелки. (c) Если же клин сжимать, то он будет скользить в противоположном направлении.

Роль системы отсчёта. Предположив, что воздух и вода движутся с равными и противоположными скоростями, мы выбрали систему отсчёта, движущуюся со средней скоростью ветра и течения. Если же мы предположим, что воздух неподвижен, то тем самым привяжем систему отсчёта к воздуху. Всё это показано на рисунке 12.3. Прямо как в жизни — сменив точку зрения, мы получаем новое понимание происходящего.

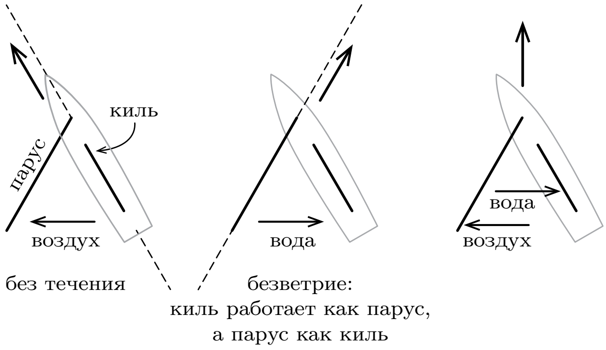


Рис. 12.3: Движение под парусом в трёх системах отсчёта.

12.2 Как плыть точно против ветра

Вопрос. Парусная лодка способна двигаться во всех направлениях, кроме тех, что направлены почти против ветра. Чтобы попасть из точки A в точку B прямо против ветра, лодке приходится идти зигзагами (лавировать). Но ведь было бы здорово двигаться точно против ветра. Можно ли сконструировать такую лодку?

Ответ. Лодка подходящей конструкции показана на рисунке 12.4. Более того, такая лодка будет автоматически разворачиваться против ветра.[2] Устройство довольно простое: длинный стержень под небольшим наклоном с одним концом в воде, а другим — в воздухе; на противоположных концах стержня установлены воздушный пропеллер и гребной винт. При правильном выборе размеров пропеллера и винта ветер будет вращать пропеллер, и гребной винт будет ввинчиваться в воду, тяня за собой лодку. Поскольку пропеллер находится в кормовой части, лодка сама будет разворачиваться против ветра.

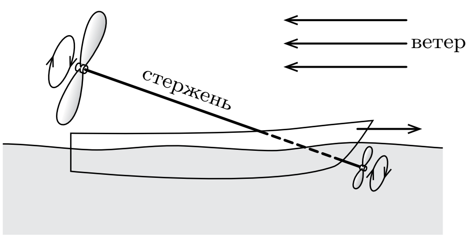


Рис. 12.4: Такая лодка сама будет разворачиваться и двигаться против ветра.

12.3 Против ветра на велосипеде

Ехать на велосипеде против сильного встречного ветра может быть тяжело. А что, если установить на велосипед ветрогенератор? Можно попытаться использовать энергию ветра для езды. У этой идеи есть очевидные плюсы и минусы. Давайте отбросим практические соображения и зададимся вопросом, может ли такое устройство помочь в принципе.

Рассмотрим конструкцию на рисунке 12.5. Ветрогенератор питает электродвигатель, который помогает крутить педали. Будем считать,

[2]Более впечатляющую конструкцию можно найти в заметке [16].

что *ветрогенератор и двигатель идеальны.* В частности, если я протащу ветрогенератор сквозь неподвижный воздух, то вся мощность, потраченная на сопротивление воздуха, возместится сгенерированной электроэнергией. Иными словами, в безветренную погоду общее влияние моего приспособления окажется нулевым.

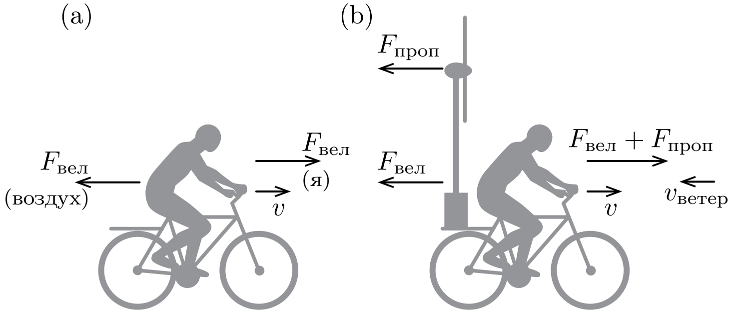


Рис. 12.5: Велосипед с ветрогенератором.

Вопрос. Будет ли преимущество от моего ветрогенератора при езде против ветра?

Ответ. Давайте вычислим разницу между мощностью[3] необходимой, с ветрогенератором и без него. Будем считать, что ветер дует со скоростью $v_{\text{ветер}}$, и я еду против ветра.

1. *Без ветрогенератора*, для езды с постоянной скоростью v, надо прикладывать силу, равную (и противонаправленную) сопротивлению велосипедиста с велосипедом $F_{\text{вел}}$. Значит, потребуется мощность
$$F_{\text{вел}} v. \tag{12.1}$$

2. *С ветрогенератором,* кроме велосипеда с велосипедистом придётся тащить пропеллер. Поэтому понадобится бо́льшая сила:
$$F_{\text{вел}} + F_{\text{проп}},$$
где $F_{\text{проп}}$ — сила ветра, действующая на пропеллер. Общая мощность теперь равна
$$(F_{\text{вел}} + F_{\text{проп}})v.$$

[3] Мощность определяется как работа, совершаемая за единицу времени. Работа же (согласно определению) равна силе, которую я прикладываю, умноженной на пройденное расстояние в направлении этой силы. Следовательно, мощность равна произведению силы на скорость в направлении действия этой силы.

Это больше, чем раньше, но часть энергии возмещается ветрогенератором. Сколько же именно? Ветрогенератор движется сквозь воздух со скоростью $v + v_{\text{ветер}}$. Согласно нашему прежнему предположению об отсутствии потерь, его мощность равна

$$F_{\text{проп}}(v + v_{\text{ветер}}).$$

Следовательно, на мою долю остаётся разность между общей мощностью и мощностью ветрогенератора:

$$(F_{\text{вел}} + F_{\text{проп}})v - F_{\text{проп}}(v + v_{\text{ветер}}) = F_{\text{вел}}v - F_{\text{проп}}v_{\text{ветер}}.$$

Сравнив этот результат с (12.1), получим, что выигрыш мощности равен

$$F_{\text{проп}}v_{\text{ветер}}.$$

Итак, *ветрогенератор*[4]*, размещённый на велосипеде, даёт тот же выигрыш в мощности, что и стационарно установленный ветрогенератор.*

Вопрос. Предположим, что пропеллер ветрогенератора и рекламный щит оказывают равные сопротивления ветру. Как отличаются кинетические энергии потоков воздуха позади этих двух препятствий?

Ответ. Ветрогенератор превращает часть кинетической энергии воздуха в электроэнергию, а рекламный щит почти не меняет кинетическую энергию воздуха. Поэтому воздух за ветрогенератором будет спокойней (будет обладать меньшей кинетической энергией), чем за щитом.

12.4 Парение без восходящих потоков

Вопрос. Может ли планер равномерно набирать высоту без восходящих потоков? Отсутствие восходящих потоков означает, что воздух движется исключительно в горизонтальном направлении.

Ответ. Да, по крайней мере в принципе — например, если скорость ветра меняется с высотой.

[4] С упомянутыми выше идеальными свойствами.

А почему? Предположим, что скорость ветра возрастает с высотой, как на рисунке 12.6. Запустим планер со слегка задранным носом против ветра. Если воздух неподвижен, то планер сбавит скорость и начнёт падать. Но поскольку ветер усиливается с высотой, происходит удивительное: по мере подъёма планер попадает в область более сильного встречного ветра. Поднимаясь, он как бы встраивается во всё быстрее движущийся поток, удерживая свою скорость относительно воздуха, без двигателей. Разумеется, его при этом относит «назад». Но, набрав высоту, он может спуститься и вернуться в исходную точку, продолжая цикл бесконечно.

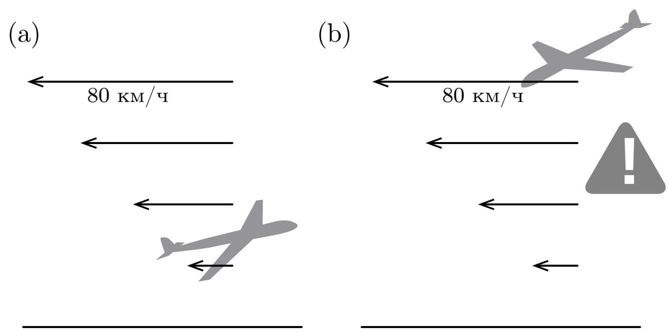


Рис. 12.6: Набор высоты без восходящих потоков.

Некоторые морские птицы умеют использовать этот механизм: они способны почти без усилий планировать при отсутствии восходящих потоков.

О ловкости птиц. Океанские волны заставляют воздух двигаться вверх-вниз, создавая кратковременные восходящие и нисходящие потоки. При приближении гребня волны, вместе с поверхностью воды поднимается воздух, а когда гребень удаляется, воздух опускается. Это не те устойчивые термические восходящие потоки, которые возникают над сушей. Но если птица летит близко к воде, оставаясь чуть впереди гребня волны, то она будет всё время находиться в зоне восходящего потока и сможет долго парить без усилий. Это умеют делать пеликаны, альбатросы и некоторые другие морские птицы. Они поступают так же, как сёрферы-люди, но без касания воды! Крылья птиц работают как доски воздушного сёрфинга. Это позволяет по-другому взглянуть на физику сёрфинга: сёрферы держатся на поднимающейся части волны.

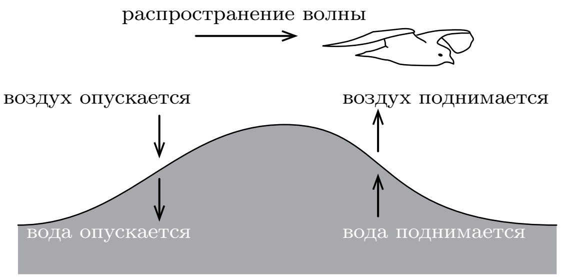


Рис. 12.7: Чтобы оседлать волну, надо оставаться в зоне потока, движущегося вверх.

Может ли дельтаплан оседлать волны? Хоть это и кажется невероятным, но в принципе дельтаплан мог бы использовать гигантские волны для воздушного сёрфинга. Он мог бы планировать, двигаясь вдоль гребня, поднимаясь перед тем, как волна сломается, переходя на следующую волну и так далее; см. рисунок 12.8. Было бы здорово проделать такое с радиоуправляемым планером.

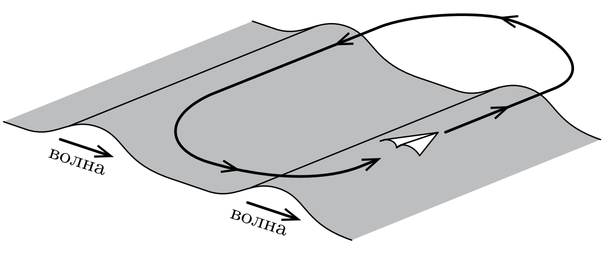


Рис. 12.8: Воздушный сёрфинг.

Вопрос. Сёрфер движется по волне с постоянной скоростью. Что ему следует сделать, чтобы ускориться? Будем считать, что волна движется с постоянной скоростью, не меняя формы.

Ответ. Чтобы ускориться, надо уменьшить угол между направлением своего движения и линией гребня. При этом придётся выйти на более крутую часть волны.

12.5 Опасность горизонтального ветра со сдвигом скорости

Парение без восходящих потоков — штука заманчивая, но у него есть обратная сторона. Представьте, что скорость ветра уменьшается при уменьшении высоты, а планер летит с малой скоростью относительно воздуха (рисунок 12.6b). Желая разогнаться, пилот инстинктивно опускает нос: без ветра это бы увеличило скорость. Но в нашем случае у планера есть шанс *свалиться*, то есть сильно сбавить скорость относительно воздуха и в результате потерять управление.

Вопрос. А что будет чувствовать парашютист при горизонтальном ветре, который меняет скорость с высотой?

Ответ. Если скорость ветра не зависит от высоты, то парашютист не будет ощущать горизонтального ветра. Однако при изменении скорости ветра с высотой парашютисту будет казаться, что на него дует невидимый пропеллер в горизонтальном направлении.

Глава 13

Движение кошки и Земли

13.1 Как кошке развернуть лапы вниз?

Если держать кошку лапами вверх и отпустить, то за долю секунды она развернёт лапы к земле. Как у неё это получается без всякой опоры?[1] Некоторые утверждают, что для этого кошка крутит хвостом. Но если внимательно рассмотреть её движения, можно убедиться, что это неверно. Известно, например, что бесхвостые кошки переворачиваются не хуже хвостатых. Кроме того, расчёты показывают, что для выполнения переворота на 180° за долю секунды кошке пришлось бы вращать хвост слишком быстро, так что его кончик должен был бы преодолеть звуковой барьер или приблизиться к нему. Это должно сопровождаться грохотом или, как минимум, громким свистом. К тому же чудовищная центробежная сила оторвала бы хвост, сделав его чуть ли не опасней пули. Так что хвостатая теория отметается.

Удивительней то, что вращение[2], начавшись с нуля, должно оставаться нулевым, ведь во время падения на кошку не действуют никакие моменты сил. Так как же кошке удаётся обойти условие нулевого вращения и перевернуться?

На рисунке 13.1 показано, как действует идеальная кошка: два цилиндра, соединённые невесомой гибкой талией. Начав с положения лапами вверх, кошка сгибается в талии. Затем она изворачивает талию так, чтобы цилиндры поворачивались вокруг своих осей в

[1] Попробуйте сами развернуться на вращающемся стуле, не касаясь пола.

[2] Строго говоря, вместо слова *вращение* надо говорить *момент импульса*. При отсутствии внешнего момента сил момент импульса должен сохраняться, то есть оставаться нулевым. Момент импульса обсуждается в приложении на странице 153.

противоположных направлениях, пока лапы не повернутся к земле. Заметим, что цилиндры вращаются в разные стороны, так что суммарное вращение во время изворачивания остаётся нулевым — этого и требовал упомянутый закон сохранения! В этом-то и состоит кошачья гениальность. Наконец, кошка выпрямляет талию и готова к приземлению.

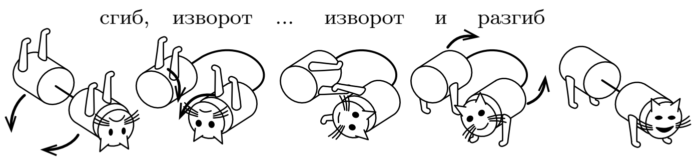


Рис. 13.1: Основные этапы: (1) сгиб; (2, 3) изворот; (4) разгиб. Гениальная идея позволяет кошке развернуться при нулевом моменте импульса: во время изворота две половинки тела крутятся в противоположных направлениях, компенсируя вращение друг друга.

Кстати, изворачивание талии (шаги 2 и 3 на рисунке) не означает скручивания.[3] Если бы кошка не согнулась, а держала тело прямо, то такой поворот был бы невозможен. Чтобы повернуть свой перёд вокруг оси, кошке в прямом положении пришлось бы поворачивать свой зад в противоположную сторону, тем самым сохраняя вращение нулевым. Это скрутило бы кошачью талию в штопор. В принципе, такая кошка смогла бы приземлиться на лапы, но с талией, перекрученной на полный оборот.

Всё становится ещё ясней, если подумать о сороконожке на рисунке 13.2.

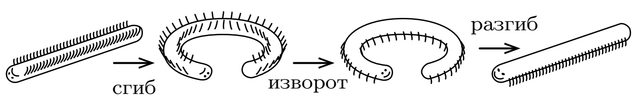


Рис. 13.2: Как сороконожка могла бы развернуть ножки к земле. Ножек больше, но принцип тот же.

Идеальная кошка помогла нам понять суть дела, однако она не совсем кошка. Настоящие кошки сгибают тело не на 180°, а примерно на 45°, и из-за того, что сгиб меньше, им приходится больше изворачиваться.

[3] Ведь, держа в руках резиновый шланг в форме буквы U, можно одновременно поворачивать концы шланга по и против часовой стрелки, не скручивая сам шланг.

13.2 Могут ли пассаты замедлить вращение Земли?

Вопрос. Пассаты, дующие на запад, действуют на Землю силой трения. Эта сила действовала против вращения Земли на протяжении многих миллионов лет. Могла ли она замедлить вращение Земли?

Ответ. Нет, поскольку суммарный момент импульса Земли и атмосферы сохраняется. Это означает, что общий эффект движения атмосферы на вращение Земли равен нулю. Существуют и другие ветры (например, западные), действующие в противоположном направлении. На самом деле Земля не ускоряет, а замедляет своё вращение — главным образом из-за приливного торможения, вызываемого Луной. По оценкам, земные сутки составляли когда-то около шести с половиной часов, но за 4 миллиарда лет удлинились до нынешних 24-х. Разумеется, за время человеческой истории это изменение не заметно.

По мере того как Земля передаёт свой момент импульса Луне[4], Луна постепенно удаляется от Земли. Это напоминает манёвры длинного спутника, обсуждаемые на странице 16.

[4] Я не учитываю влияние Солнца и гораздо более слабое влияние других планет.

Глава 14

Ещё задачи

14.1 Книга вместо штопора

Следующий метод работает — это проверил я сам (дви́жимый научным любопытством и отсутствием штопора, не скажу в каком порядке).

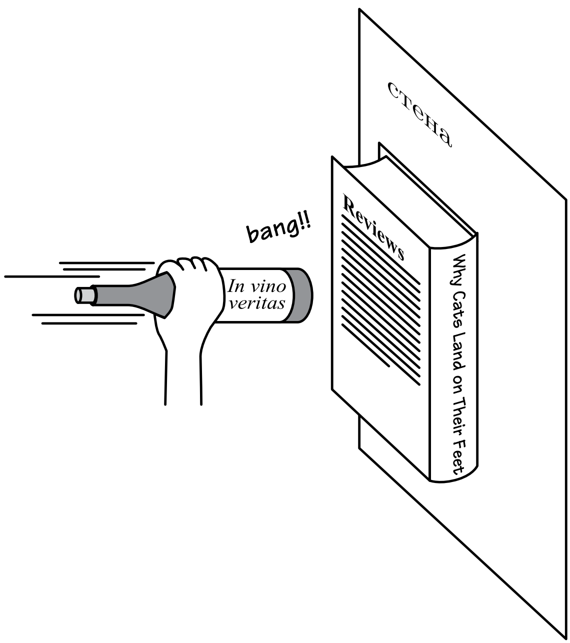


Рис. 14.1: Пробка будет понемногу выходить с каждым ударом, но почему?

Прижав книгу к стене, ударяйте дном бутылки о книгу. (Во избежание травм, заверните бутылку в полотенце и наденьте защитные очки. Тому, кто рискнёт проделать это с бутылкой шампанского, может достаться премия Дарвина.) При каждом ударе пробка будет чуть-чуть выходить наружу, пока наконец её не удастся вытянуть.

Я проделал это давным-давно, будучи советским студентом, кощунственно использовав для этого том из собрания сочинений Ленина. Эта книга сгодилась для поставленной задачи, хотя штопор сработал бы лучше.[1]

Вопрос. Что же выталкивает пробку?

Ответ. Краткий ответ: винный удар, похожий на гидравлический удар (или гидроудар), возникающий при резкой остановке потока воды в водопроводной трубе. Гидроудар вполне может привести к повреждениям водопровода.

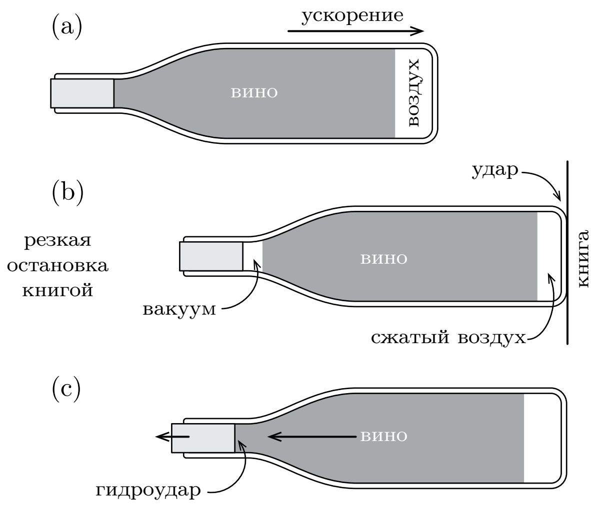


Рис. 14.2: Как пробка выталкивается из бутылки.

[1]Это был редкий случай восстановления исторической справедливости, ведь в результате экономической политики, пропагандируемой в сочинениях Ленина, с прилавков пропали многие вещи, включая, возможно, и штопоры, однако я сумел использовать вместо штопора эти самые сочинения.

Рисунок 14.2 даёт представление об этом процессе.[2] Сначала (рисунок 14.2a) бутылка движется с ускорением к стене. В результате воздух подходит ко дну, а вино собирается слева, у пробки (точно так же, как пассажиров в быстро разгоняющемся автобусе отбрасывает назад). При встрече бутылки с книгой вино продолжает двигаться по инерции, сжимая воздух справа и образуя пузырь вакуума около пробки (рисунок 14.2b). Сжатый воздух, действуя как пружина, замедляет вино, а затем *толкает его обратно в сторону пробки.* Пузырь вакуума схлопывается — ведь вакуум, в отличие от воздуха, не смягчает удар! В момент схлопывания вино бьёт по пробке, как молот по наковальне, без смягчающей подушки. В результате пробка немного выдвигается. По сути, мы стучим вином по пробке изнутри! После нескольких ударов пробка выходит настолько, что её можно вытащить пальцами.

Кавитация. Схлопывающийся вакуум создаёт огромные силы в менее желательных ситуациях, например возле гребных винтов лодок. Пузырь вакуума образуется, если гребной винт вращается слишком быстро. Когда вакуум схлопывается, возникающий при этом удар может вывести винт из строя.

Во всех этих явлениях (кавитации, открывании бутылки и гидроударе) работает всё тот же второй закон Ньютона $F = ma$, заставляя огромное ускорение a сопровождаться огромной силой F. Кстати, электрические токи также обладают инерцией[3], и подобный эффект возникает и в электрических цепях. Благодаря этому эффекту можно получить сильный электрический удар от маленькой батарейки (см., например, [11, стр. 178—179]).

14.2 «Оно живое!»

Задача. Груз подвешен к потолку на системе из шнурков и пружин. Опустится ли груз ниже, если перерезать одну из пружин?[4] В

[2]Надо признаться, что это всего лишь моё мнение — оно не подтверждено никакими измерениями или прямыми наблюдениями, скажем, с помощью скоростной камеры, и вряд ли организации, поддерживающие науку, предложили бы финансирование подобных исследований.

(Переводчики подтверждают, что метод работает. Кстати, удобнее и безопаснее держать бутылку в сапоге и бить каблуком по стене. Однако метод перестаёт работать, если бутылка наполнена полностью вплоть до пробки, а также если в пробке просверлить отверстие миллиметрового диаметра. Эти два эксперимента отчасти подтверждают, что дело именно в гидравлическом ударе. — *Прим. ред.*)

[3]Она называется электромагнитной индукцией.

[4]Предполагается, что все пружины растянуты. — *Прим. ред.*

частности, что произойдёт с грузом на рисунке 14.3, если перерезать среднюю пружину?[5]

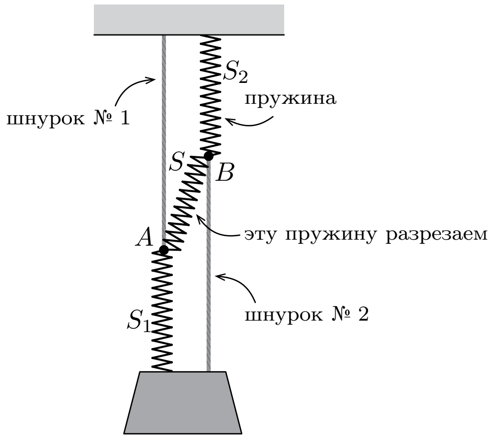


Рис. 14.3: Опустится ли груз, если перерезать среднюю пружину?

Решение. Груз поднимется. Чтобы понять, почему, давайте сначала зафиксируем груз и затем перережем пружину S. В результате этого натяжение шнурков увеличится, а натяжение пружин останется прежним. То есть на груз будет действовать бóльшая поднимающая сила. Если теперь отпустить груз, то он поднимется, как и утверждалось.

Иными словами, пружина S тянет груз вниз, притягивая вниз точку B. Поэтому, перерезая эту пружину, мы поднимаем груз.

14.3 Падение быстрее g: как пол всасывает цепь?

Удивительное всасывание. Следующее наблюдение принадлежит Энди Руине (видеоролик и статья доступны на его веб-странице [23]).[6]

[5]Этот парадокс был описан Дитрихом Брессом в контексте транспортных сетей [3]. Бресс обнаружил, что добавление лишней дороги может увеличить время в пути для всех. Механический эксперимент с пружинами, почти как на рисунке 14.3, аналогичен задаче о транспортных сетях, он обсуждается в статье [20]. Я признателен Полу Нахину за указание этих источников.

[6]Для тех, кто поленится идти по ссылке: в видеоролике показано, что если отпустить лесенку, как на рисунке 14.4, на стол с высоты 75 см, и одновременно

Если держать верёвочную лестницу, схематично показанную на рисунке 14.4, за верхний конец и отпустить, то произойдёт удивительное. Как только она коснётся пола, оставшаяся часть начнёт двигаться быстрее свободно падающего тела. Будет казаться, что пол всасывает падающую часть цепи. Почему же это происходит?

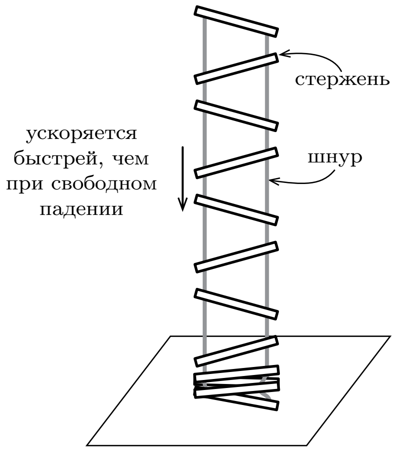


Рис. 14.4: Цепь втягивается за счёт ударов об пол.

Объяснение. Давайте разберёмся, что происходит, когда одно звено ударяется об пол. Это напоминает падающий карандаш. Когда конец карандаша ударяется об пол, другой его конец резко дёргается вниз (предполагается, что в момент удара карандаш летит под наклоном). В принципе звенья обычной цепи могут создавать подобный рывок вниз при ударе под подходящим углом, и тогда они тоже будут поддёргивать за собой остальную часть цепи.[7]

14.4 Вагончик в атмосфере

Давайте вспомним школьную задачу о ходьбе в вагончике. Человек проходит из конца в конец вагончика; вагончик катится без трения и изначально находился в покое. На какое расстояние после

дать идентичной ей лесенке свободно падать, то первая лесенка обгонит вторую примерно на 6—7 см. — *Прим. ред.*

[7]На веб-странице Энди Руины [23] есть видеоролик эксперимента с обычной цепью, в котором не заметно разницы со свободно падающей цепью. — *Прим. ред.*

этого сдвинется вагончик? Известны длина вагончика и отношение масс человека и вагончика. Сопротивлением пренебрегаем.[8]

А вот интересная вариация этой задачи, предложенная Димой Бураго.

Задача. Давайте учтём атмосферу: будем считать, что воздух действует на вагончик силой сопротивления F, пропорциональной его скорости: $F = kv$, где k — некоторая ненулевая константа. Насколько сдвинется вагончик после того, как человек пройдёт его из конца в конец? Изначально всё покоится. Массы человека и вагончика m, M, а также длина вагончика L известны.

Решение. В итоге вагончик окажется там же, где был в начале! Масса человека не имеет значения, так же, как длина и масса вагончика, и даже величина коэффициента сопротивления k. То есть *все* исходные данные оказались лишними!

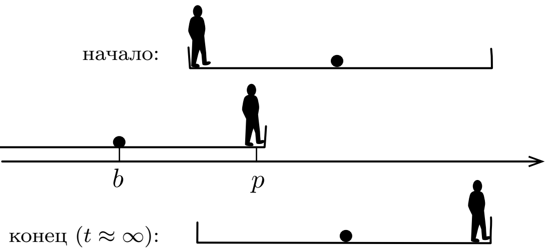


Рис. 14.5: В конце концов вагончик вернётся в начальное положение.

Описание движения. (Точное решение будет дано чуть ниже.) Когда человек начинает идти вправо, вагончик начинает двигаться влево (рисунок 14.5). Следовательно, сила сопротивления направлена вправо, и по второму закону Ньютона центр масс системы человек+вагончик ускоряется вправо.[9] Значит, центр масс этой системы

[8] Кратко напомню решение. Пусть Δp и Δb — сдвиги человека и вагончика относительно земли; нас интересует Δb. Поскольку центр масс остаётся неподвижным, $m\Delta p = M\Delta b$. Кроме того, $\Delta p + \Delta b = L$. Отсюда получаем $\Delta b = \frac{mL}{m+M}$. Похоже на правду, ведь чем тяжелее вагончик, тем меньше будет его смещение; с другой стороны, очень тяжёлый человек заставит вагончик сдвинуться почти на всю его длину.

[9] Напоминает бегущую на месте мультяшную собаку: её лапы скользят по земле (так же, как укатывается вагончик), в то время как центр масс собаки ускоряется вперёд. Однако мультяшные персонажи регулярно нарушают законы Ньютона.

движется вправо, и он продолжит своё движение по инерции даже после того, как человек остановится. Вагончик постепенно замедляется из-за сопротивления воздуха.

Итак, вагончик начал движение влево, что вызвало появление силы сопротивления, заставившей центр масс всей системы двигаться вправо, и это движение сохранилось после того, как человек остановился. Удивительным образом, вагончик со временем подойдёт к своему исходному положению. Пока что наше рассуждение не объясняет, почему возникает такое странное совпадение, но вскоре всё станет ясно.

Обоснование. Совпадение объясняется довольно просто, но требует матанализа. Пусть $b = b(t)$ — положение центра масс вагончика в момент времени t (всё измеряется относительно земли). Аналогично, $p = p(t)$ — положение человека (считаем его материальной точкой). Центр масс системы вагончик+человек вычисляется как взвешенное среднее двух положений:

$$C = C(t) = \frac{mp + Mb}{m + M}.$$

Применив второй закон Ньютона (сформулированный на странице 142) в направлении движения вагончика, получим

$$(m + M)\,\ddot{C} = -k\dot{b},$$

здесь каждая точка означает производную по времени. Подставив выражение для C, получаем

$$m\ddot{p} + M\ddot{b} = -k\dot{b}. \qquad (14.1)$$

Давайте проинтегрируем это равенство от $t = 0$ до $t = \infty$. По формуле Ньютона — Лейбница, $\int_0^\infty \ddot{p}\,dt = \dot{p}(\infty) - \dot{p}(0)$. Так как $\dot{p}(0) = 0$ (вначале всё покоилось) и $\dot{p}(\infty) = \lim_{t\to\infty} \dot{p}(t) = 0$ (в конце всё остановилось), заключаем, что $\int_0^\infty \ddot{p}\,dt = 0$. Точно так же получится, что $\int_0^\infty \ddot{b}\,dt = 0$. Проинтегрировав (14.1), получим

$$0 = k(b(\infty) - b(0)).$$

В частности, если $k > 0$, то окончательное смещение вагончика будет $b(\infty) - b(0) = 0$. Таким образом, $b(\infty) = b(0)$, то есть вагончик подъедет к своему исходному месту при $t \to \infty$.

Довольно неожиданно, что коэффициент k оказался лишним. Заметим, однако, что значение k влияет на скорость приближения к исходному положению. Чем меньше k, тем больше придётся ждать, а при $k = 0$ вагончик вовсе не станет возвращаться.

14.5 Лодка-призрак без следов и усилий

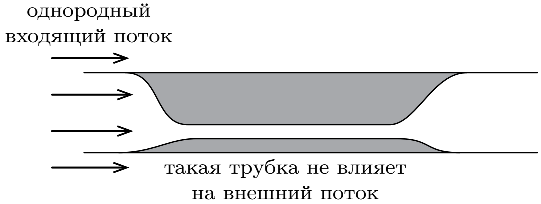
Начнём с вопроса для разминки.

Вопрос. Было бы у лодки в идеально невязкой воде сопротивление?

Ответ. Бо́льшая часть энергии расходуется на волны; вязкость не столь существенна. Чем меньше волн оставляет лодка, тем лучше. Корпус, форма которого почти не создаёт волн, экономил бы много энергии.

Вопрос. Можно ли, по крайней мере в принципе, спроектировать лодку, которая почти не будет оставлять следа на воде? Пренебрегите вязкостью, пусть скорость будет постоянной, и предположите, что изначально не было волн.

Решение 1 (предложено Энди Руиной). Можно сделать корпус из сот, образованных трубками; вход и выход каждой трубки расположены на одном уровне, как показано на рисунке 14.6. Вода входит в такую трубку в точке A и выходит в точке B. При отсутствии вязкости такой корпус был бы гидравлической невидимкой: при равномерном движении он не создавал бы возмущений в воде.



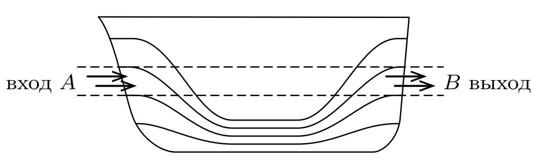


Рис. 14.6: (a) Поток не замечает трубы. (b) Корпус, сделанный из множества таких труб, не будет оставлять за собой возмущений (в идеализированном мире).

Решение 2. Чтобы предотвратить образование волн, можно снабдить лодку юбкой; то есть добавить диск, расположенный вровень с поверхностью воды, как на рисунке 14.7. Если юбка достаточно широкая, то волн почти не будет. (Хотя в теории это может сработать, на практике такое решение вряд ли удобно по целому ряду причин, не говоря уже об эстетическом аспекте лодки в балетной пачке.)

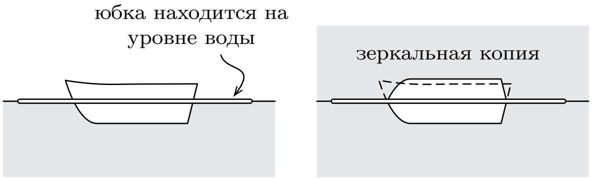


Рис. 14.7: Юбка вокруг лодки не позволяет волнам образовываться, тем самым уменьшая сопротивление.

Парадокс Д'Аламбера и лодка в юбке. Приблизительно в 1752 году Д'Аламбер понял, что тело, движущееся в жидкости с постоянной скоростью (относительно жидкости), не испытывает сопротивления. При этом предполагается, что жидкость идеальна[10] и заполняет всё пространство. Но давайте заменим всё, что было над поверхностью, зеркальной копией того, что под поверхностью (рисунок 14.7); тогда вода заполнит всё пространство, а симметричная «лодка» превратится в подводную лодку.[11] Согласно парадоксу Д'Аламбера, лодка не будет испытывать сопротивления (при идеализированных условиях, указанных в сноске). Можно думать, что юбка нужна лодке как раз чтобы сделать парадокс Д'Аламбера (почти) применимым.[12]

[10] То есть: несжимаемая, невязкая, безвихревая. Невязкая означает, что вязкость нулевая; безвихревая — нулевая завихренность (см. страницу 50). Подробности можно найти в любом учебнике по гидродинамике, например, у Батчелора [2].

[11] После такого отражения гравитационное поле будет выглядеть экстравагантно, но это ничему не мешает. — *Прим. ред.*

[12] Ещё задача: Лодка-призрак и вагончик имеют равные массы и движутся с равными скоростями; трением и вязкостью воды пренебрегаем. Мы полностью останавливаем их, совершая над ними отрицательные работы $-A$ и $-B$. Что больше A или B, и почему? (Эту задачу рассказал Марк Леви переводчикам, а сам он услышал её от Сергея Козлова. Подсказка: $A \neq B$.) — *Прим. ред.*

14.6 Американские горки с постоянной перегрузкой

Можно ли придумать трассу для американских горок, чтобы пассажир всё время испытывал постоянную перегрузку, скажем, $G = 2g$, где g — ускорение свободного падения?

Задача. Будем считать, что рельс проходит по кривой в вертикальной плоскости, а вагончик — это бусинка, скользящая по этой кривой без трения, повинуясь силе тяжести.

Решение. Ответ «да» — для любой перегрузки $G > g$ существует такая трасса; пример показан на рисунке 14.8. При подходящей начальной скорости пассажир будет ощущать свой вес равным mG, если на земле его вес равен mg. Обратите внимание на бóльшую кривизну ближе к верхней части — она необходима для увеличения центробежной силы, чтобы скомпенсировать два эффекта: (1) уменьшение центробежной силы из-за меньшей скорости на высоте и (2) действие силы тяжести, стремящейся вырвать пассажира из сиденья.

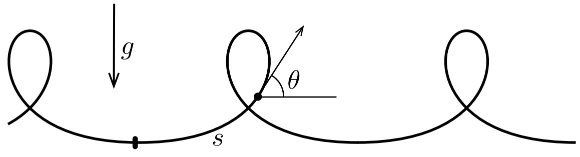


Рис. 14.8: Если скользить по траектории, описанной уравнением Кеплера, то, стартовав с подходящей скоростью, мы будем испытывать постоянную перегрузку.

Уравнение Кеплера. Угол θ с горизонталью для такой трассы с постоянной перегрузкой описывается уравнением Кеплера:

$$\theta - e\sin\theta = cs, \qquad e = \frac{g}{G} < 1,$$

где c — постоянная, связанная со скоростью в нижней точке, а s — длина, отсчитываемая вдоль трассы. Выбирая разные значения постоянной c, мы будем получать американские горки разных размеров, но с одной и той же перегрузкой G. Объяснение того, как уравнение Кеплера появляется в нашей задаче, требует матанализа, и мы его пропускаем.

Любопытно, что уравнение Кеплера возникло в астрономии, при решении совсем другого вопроса.

14.7 Выстрел в тележку

Задача. На тележке укреплён барабан, как показано на рисунке 14.9; барабан может вращаться, а тележка катиться без всякого трения. Проведём два опыта. В первом выстреливаем пулю так, чтоб она попадала в барабан в точке A, заставив его вращаться, и после этого упала на платформу тележки. Вся система (тележка, барабан и пуля на платформе) начинает катиться. Во втором опыте пуля попадает в точку B, и поэтому барабан не раскручивается. Поскольку во втором случае энергия не тратится на вращение барабана, больше энергии остаётся на движение самой тележки. Насколько быстрее будет катиться тележка во втором случае? Будем считать, что масса пули равна массе барабана, а массой тележки можно пренебречь. Можно также предположить, что вся масса барабана сосредоточена на его ободе.

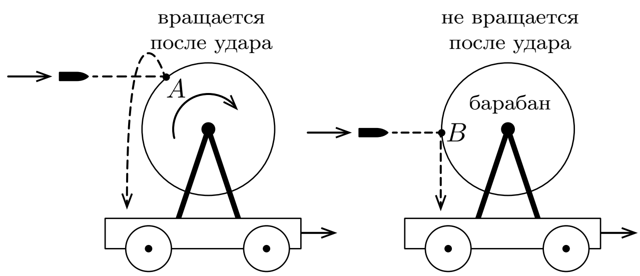


Рис. 14.9: Насколько быстрее покатится вторая тележка?

Ответ. Обе тележки будут катиться с одинаковой скоростью! Я спрятал ошибку, сказав (верно), что во втором случае остаётся больше энергии. Однако я не уточнил, на что пойдёт эта лишняя энергия, а пойдёт она (как я сейчас объясню) не на разгон тележки, а в тепло от удара. Короче говоря, энергия вращения барабана в первом случае равна энергии избыточного тепла во втором.

Пояснение. По закону сохранения импульса, скорости движения в обоих случаях одинаковы. Главное, что вращение не меняет импульс барабана, так как импульс каждой частицы компенсируется равным и противоположным импульсом её антипода. Поэтому независимо от того, вращается барабан после удара или нет, импульс всей системы (пуля+тележка+барабан) будет равен Mv, где M — суммарная масса, а v — скорость. Но весь этот импульс пришёл от импульса пули:

$$Mv = mV,$$

где m — масса пули, а V — её скорость до удара.[13] Это и доказывает, что скорость тележки v не зависит от вращения.

14.8 Как найти $\sqrt{2}$, используя ботинок

Задача. У вас в распоряжении секундомер и ботинок. Как найти приближённое значение $\sqrt{2}$?

Решение

1. Подвесив ботинок за шнурок, мы получим маятник. С помощью секундомера измерим число его колебаний в минуту; обозначим результат через n_1.

2. Теперь сложим шнурок пополам и измерим новое число колебаний в минуту; обозначим результат через n_2.

3. Ответ: $\sqrt{2} \approx \frac{n_2}{n_1}$.

Для большей точности берите интервал времени побольше (и лучше использовать ботинок поменьше).

Объяснение. Время T одного полного колебания маятника задаётся формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

где L — длина маятника, а g — ускорение свободного падения.[14] Для периодов двух маятников длиной L_1 и L_2 получаем

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

[13] Я использую прописные буквы (M, V) для больших величин и строчные (m, v) для малых.

[14] Строго говоря, эта формула приблизительная, но она даёт хорошее приближение для колебаний малой амплитуды.

Мы взяли $L_1 = 2L_2$ и подсчитали число колебаний в минуту для каждой длины. Имеем

$$T_1 \approx \frac{1}{n_1}\,\text{мин},$$

так как за одну минуту совершается n_1 полных колебаний. Аналогично,

$$T_2 \approx \frac{1}{n_2}\,\text{мин}.$$

Следовательно,

$$\frac{n_2}{n_1} \approx \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{2}.$$

Теперь ясно, как получить другие квадратные корни. Например, чтобы вычислить $\sqrt{3}$, нужно взять $L_1/L_2 = 3$, сделав шнурок в 3 раза короче.

Приложение

Ниже приводится краткий обзор понятий, упоминаемых в книге.

А.1 Законы Ньютона

Все законы Ньютона формулируются в инерциальной системе отсчёта, то есть в системе, которая движется без ускорения и без вращения.

Первый закон Ньютона. Тело продолжает двигаться с постоянной скоростью по прямой или остаётся в покое, пока сумма всех сил, действующих на него, остаётся равной нулю.

Второй закон Ньютона. Силы, действующие на тело, вызывают ускорение, и это ускорение **a** прямо пропорционально сумме приложенных сил **F**:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{A.1}$$

коэффициент пропорциональности m называется *массой*. Здесь **a** и **F** — это векторы (см. рисунок А.1).

Часто рассматривают проекцию равенства (А.1) на какое-либо направление; например, при изучении движения по прямой интересно лишь направление вдоль прямой. В таких случаях ускорение и силы рассматриваются как скалярные (а не векторные) величины.

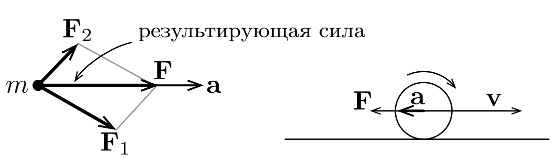


Рис. А.1: Второй закон Ньютона

Скалярный вариант закона Ньютона можно переписать как $m = F/a$. В частности, если ускорение $a = 1$, то $m = F$; то есть *масса — это сила, необходимая для сообщения телу единичного ускорения.* Именно это и даёт интуитивное представление об инерции: мы ощущаем, какая сила нужна, чтобы ускорить тело.

Первый закон является частным случаем второго. На мой взгляд, он сформулирован отдельно лишь потому, что это очень важный частный случай.[15]

При вычислении равнодействующей силы $\mathbf{F}$ в (А.1) иногда забывают некоторые силы. Это очень распространённая ошибка. Несколько парадоксов в книге (например, 2.1, 4.2 и 4.4) основаны именно на этой ошибке.

Третий закон Ньютона. Два взаимодействующих тела действуют друг на друга с равными по величине и противоположно направленными силами: если тело A действует на тело B силой $\mathbf{F}$, то тело B действует на тело A силой $-\mathbf{F}$ (см. рисунок А.2).

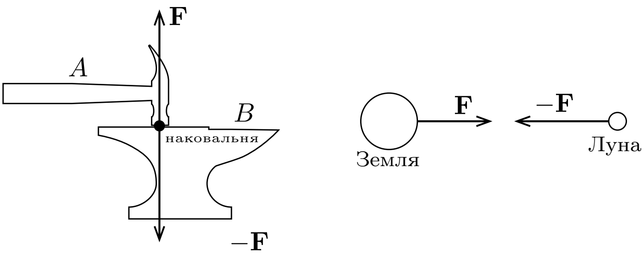


Рис. А.2: Третий закон Ньютона.

Задача. Когда я тащу ящик по полу, сила, с которой я тяну ящик вперёд, равна силе, с которой ящик тянет меня назад. Почему же выигрываю я, а не ящик?

Решение. Скрытая ошибка в неправильном расчёте сил, действующих на меня (и на ящик). Если я тащу ящик с постоянной скоростью, то трение моих ног о землю уравновешивает силу, с которой ящик тянет меня назад. Когда я *начинаю* тащить ящик, трение между ногами и землёй превышает силу, с которой ящик тянет меня назад, и я ускоряюсь. В то же время, для ящика моя сила тяги больше его

[15] Иногда в первый закон Ньютона включается определение инерциальных систем и постулируется их существование. — *Прим. ред.*

трения о пол, и он тоже ускоряется. Обратите внимание, что мне ни разу не пришлось сравнивать силу, с которой я действую на ящик, с силой, с которой ящик действует на меня.

A.2 Кинетическая энергия, потенциальная энергия и работа

Давайте определим сначала работу, а уже на её основе — кинетическую и потенциальную энергии.

A.2.1 Работа

Рассмотрим постоянную силу F, перемещающую тело на расстояние D (см. рисунок A.3). Определим работу W, совершаемую этой силой, как

$$W = FD. \tag{A.2}$$

А что делать, если сила не направлена вдоль линии движения? В этом

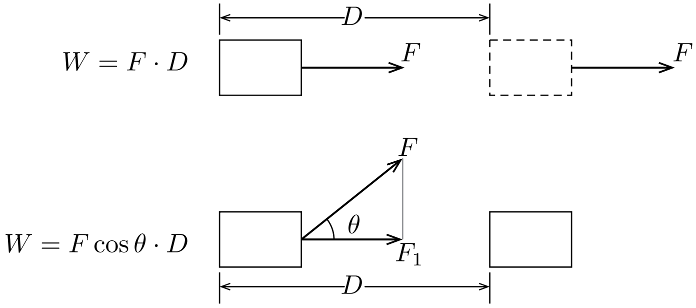


Рис. A.3: Определение работы.

случае придётся изменить приведённое определение, взяв вместо силы её проекцию на направление движения:

$$W = F_1 D = (F\cos\theta)D. \tag{A.3}$$

Пример. Чтобы поднять груз весом $F = mg$ вертикально вверх на высоту H, нужно приложить силу mg на протяжении всего пути длины H, тем самым совершив работу mgH, см. рисунок A.4. Если же тащить тот же груз по наклонной плоскости на ту же высоту, то потребуется меньшая сила: $F_1 = mg\sin\theta$, но её придётся прикладывать на большем расстоянии $D_1 = H/\sin\theta$; работа в этом случае равна

$F_1 D_1$. В этой формуле $\sin\theta$ сокращается. Поэтому работа окажется той же, что и при вертикальном подъёме: $W_1 = W = mgH$. И это досадно, ведь если бы было не так, то получился бы вечный двигатель. Действительно, вообразите на мгновение, что $W_1 > W$. Тогда мы могли бы поставить гибридный автомобиль в точке C, скатить его вниз в A, тем самым зарядив батарею энергией W_1 (при отсутствии потерь), затем проехать из A в B (что не требует работы, так как дорога горизонтальна), а потом подняться на автомобильном лифте из B в C, затратив энергию $W < W_1$. Завершив цикл, мы получили бы избыток энергии $W_1 - W$ — слишком хорошо, чтобы быть правдой.

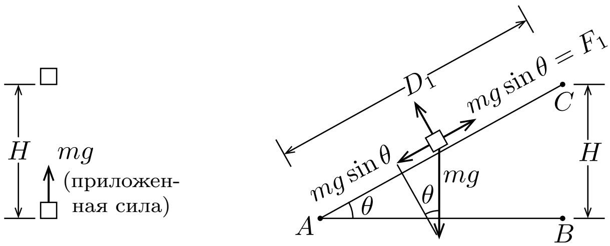


Рис. А.4: Работа, необходимая для перемещения массы из точки A в точку C в гравитационном поле, не зависит от пути.

А как определить работу, если сила меняется вдоль пути и сам путь кривой? В этом случае путь разрезается на малые отрезки. Каждый отрезок почти прямой, и сила на нём почти постоянна, так что определение (А.3) с хорошей точностью применимо к каждому такому отрезку. Затем результаты для всех отрезков складываются. Чем мельче разбиение пути, тем ближе полученная сумма к тому, что мы имеем в виду под работой.[16]

А.2.2 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия K материальной точки, движущейся со скоростью v, определяется как работа, необходимая для её разгона из состояния покоя до скорости v.[17]

[16] Формально говоря, работа определяется как интеграл

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C F\cos\theta ds, \tag{A.4}$$

где s — это длина дуги вдоль пути C; буква C призвана напомнить слово «curve» (кривая).

[17] Это определение молчаливо предполагает, что необходимая работа не зависит от того, как она совершается: слабой силой за долгое время, сильной за короткое

Из этого определения выводится, что $K = mv^2/2$, где m — масса материальной точки. Действительно, давайте разгонять массу m из состояния покоя до скорости v, прикладывая некоторую постоянную силу F (величина F скоро сократится). Кинетическая энергия определяется как совершённая работа:

$$K = F \cdot D, \tag{A.5}$$

где D — пройденное расстояние, а F — постоянная приложенная сила. (Напомним, что нам надо выразить K через m и v, так что F и D должны будут сократиться.) Заметим, что

$$F = ma = m\frac{v}{T},$$

где T — время, за которое достигается скорость v. Кроме того,

$$D = v_{\text{сред}}T = \frac{0+v}{2}T = \frac{v}{2}T.$$

Подставив полученное в (A.5), получим:

$$K = F \cdot D = \left(m\frac{v}{T}\right) \cdot \left(\frac{v}{2}T\right) = \frac{mv^2}{2}.$$

Теперь ясно, почему v возводится в квадрат — обе величины — сила $F = m(v/T)$ и расстояние $D = (v/2)T$ — в (A.5) пропорциональны v. При данном T бóльшая скорость v требует большей силы F и сопровождается бóльшим расстоянием D. Этот двойной удар и объясняет квадрат. Половинка в $mv^2/2$ возникает из-за того, что $v_{\text{сред}} = v/2$.

A.2.3 Потенциальная энергия

Предположим, что на частицу действует сила, задаваемая некоторым силовым полем. Если частица находится в точке A, то её потенциальная энергия определяется как работа, необходимая для перемещения частицы из заранее выбранной точки O в точку A. Иными словами, это работа, которую нужно совершить *против* силового поля, перемещаясь из O в A.

или же переменной силой. В данном случае это предположение верно: работа не зависит от способа её выполнения. Это можно увидеть, разбив время на короткие интервалы и просуммировав работу, совершаемую на каждом из них. Члены в этой сумме сократятся, и получится то же выражение, как если бы приложенная сила была постоянной.

Пример 1. Выберем точку O на уровне земли. Потенциальная энергия массы, находящейся в точке A на высоте H, согласно приведённому выше определению, будет равна работе, необходимой для перемещения массы из O в A. Как уже объяснялось на странице 144, эта работа равна mgH.

Пример 2 (требует матанализа). Для кометы в гравитационном поле Солнца выберем точку O на бесконечности. Предположим, что сама комета находится на расстоянии r от центра Солнца. Потенциальная энергия кометы в этом случае равна работе, которую нужно совершить против гравитационной силы

$$F = \frac{k}{x^2},$$

(здесь x — расстояние до центра Солнца) при изменении x от ∞ до r:

$$P(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{k}{x^2} dx = -\frac{k}{r}. \qquad (A.6)$$

Минус в этой формуле указывает, что при перемещении массы с ∞ в r нам надо прикладывать силу, противоположную направлению движения. Иными словами, при движении с бесконечности гравитационное поле совершает работу за нас. (Заметим, что в предыдущем примере потенциальная энергия массы ниже пола отрицательна. Это вполне аналогично отрицательности энергии в формуле (A.6).)

На рисунке A.5 показан воронкообразный график потенциальной энергии кометы.

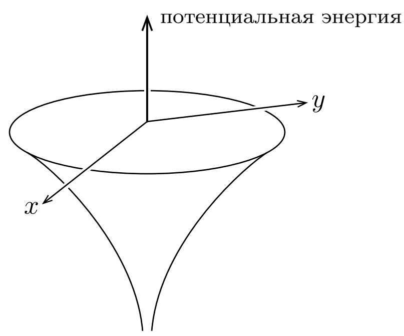


Рис. A.5: Потенциальная энергия кометы в гравитационном поле звезды.

Потенциальная энергия определяется с точностью до добавления константы, что связано со свободой выбора точки O. Например, мы можем вычислить потенциальную энергию шара в комнате относительно уровня пола или, если захотим, относительно уровня поверхности стола и так далее; результаты будут отличаться на константу.

Консервативные поля. В нашем определении потенциальной энергии предполагалось, что работа не зависит от выбора пути между точками O и A. Это предположение выполняется для гравитационного и электростатического полей. Такие поля называются *консервативными*. Существуют, однако, силовые поля, в которых работа зависит от пути; простой пример приведён на рисунке A.6.[18] Для таких неконсервативных полей понятие потенциальной энергии теряет смысл. Из неконсервативного силового поля можно выкачивать энергию. Например, работа, совершаемая полем по замкнутому пути $ABCDA$ на рисунке A.6, положительна. Если бы такое силовое поле создавалось неподвижными зарядами, то мы получили бы неисчерпаемый источник энергии.

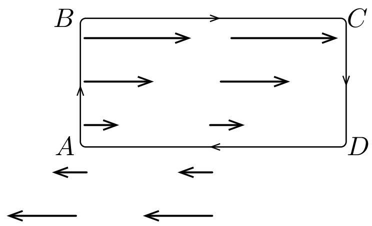


Рис. A.6: Пример неконсервативного поля.

A.2.4 Сохранение энергии

Рассмотрим частицу массы m, движущуюся под действием *консервативного* силового поля (можно думать о комете, летящей вокруг Солнца, или о снаряде под действием силы тяжести, пренебрегая сопротивлением воздуха). При движении частицы её кинетическая энергия K и потенциальная энергия P изменяются каждая по отдельности; однако их сумма остаётся постоянной во времени:

$$K + P = \text{const}. \tag{A.7}$$

[18]Математически говоря, консервативные поля — это большая редкость, ведь это поля, у которых ротор тождественно равен нулю.

Это является следствием второго закона Ньютона вместе с предположением, что силовое поле консервативно.[19]

Для кометы закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{k}{r} = E = \text{const}.$$

В частности, если r уменьшается, то v увеличивается, что вполне согласуется с интуицией.

A.3 Центр масс

Центр масс использовался уже Архимедом 2400 лет назад, а, возможно, и раньше. Его можно определить как точку равновесия тела, подвешенного в постоянном гравитационном поле.[20] Однако центр масс является чисто геометрическим понятием; его можно определить без физики как среднее положение частиц тела.

Для примера рассмотрим гантель, состоящую из двух масс m и M, расположенных на оси x в точках с координатами x и X соответственно. Пусть m и M — целые числа; тогда можно думать, что m монеток лежит в точке x, и M монеток в точке X. Чтобы найти среднюю координату, надо сложить координаты всех монет и поделить на их число:

$$\text{центр масс} = \frac{\overbrace{x + \cdots + x}^{m\ \text{раз}} + \overbrace{X + \cdots + X}^{M\ \text{раз}}}{\underbrace{m + M}_{\text{число монеток}}} = \frac{mx + MX}{m + M}.$$

---

[19] Вот быстрый вывод тождества (A.7) в скалярном случае с применением матанализа. Умножив обе стороны во втором законе Ньютона $ma = F$ на скорость $v = \dot{x}$ (точка обозначает производную по времени), получим

$$m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x},$$

что равносильно

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} - \int\limits_0^x F(s)ds\right) = 0.$$

Заметим, что $-\int_0^x F(s)ds = \int_0^x(-F(s))ds$ — это как раз потенциальная энергия, ведь это работа, которую необходимо совершить против силы F, чтобы переместить массу из 0 в x; знак минус появился от слова «против». Итак, получаем

$$\frac{mv^2}{2} + \int\limits_0^x \big(-F(s)\big)ds = K + P = \text{const},$$

что и требовалось.

[20] Если гравитационное поле непостоянно, то точка равновесия тела зависит от ориентации тела и приведённое определение центра масс перестаёт работать.

В общем случае N масс m_i при $1 \leqslant i \leqslant N$, каждая из которых находится в точке $\mathbf{x}_i$ пространства, радиус-вектор центра масс выражается похожей формулой:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{m}\sum m_i\mathbf{x}_i, \qquad \text{где} \qquad m = \sum m_i. \tag{A.8}$$

Выражение (A.8) можно переписать как

$$\mathbf{x} = \sum \frac{m_i}{m}\mathbf{x}_i.$$

То есть можно думать, что центр масс есть взвешенное среднее радиус-векторов частиц, где веса пропорциональны вкладу каждой массы в общую массу.

A.4 Импульс

Одна частица. Постоянная сила $\mathbf{F}$, приложенная к массе m, вызывает постоянное ускорение $\mathbf{a}$, связанное соотношением

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{A.9}$$

За время Δt скорость изменится на $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$, ведь ускорение определяется как изменение скорости за единицу времени.[21] Умножив обе части закона Ньютона (A.9) на Δt и воспользовавшись равенством $\mathbf{a}\Delta t = \Delta\mathbf{v}$, получим

$$m\Delta\mathbf{v} = \mathbf{F}\Delta t, \qquad \text{или} \qquad m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}\Delta t. \tag{A.10}$$

Вектор $m\mathbf{v}$ называется *импульсом* частицы. Можно думать, что $m\mathbf{v}$ описывает величину и направление движения.

Зачастую мы будем рассматривать движение вдоль прямой. В этих случаях можно думать, что импульс — скалярная величина.

Задача. Если выстрелить в дверь из пистолета, то она не откроется, даже если была приоткрыта; и это несмотря на огромную силу, с которой пуля дырявит дверь. А при этом лёгкое нажатие пальцем откроет дверь. Как это объяснить?

[21] В случае непостоянного ускорения $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ приведённую формулу надо поменять на следующую: $\Delta\mathbf{v} = \bar{\mathbf{a}}\Delta t$, где $\bar{\mathbf{a}}$ — среднее ускорение, определяемое как $\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{a}(t)dt$, при $\Delta t = t_2 - t_1$.

Решение. Палец сообщает двери больший импульс из-за гораздо большего времени контакта:

$$F_{\text{палец}}\Delta t_{\text{палец}} > F_{\text{пуля}}\Delta t_{\text{пуля}}.$$

В этом примере направление импульса не имеет значения, поэтому мы рассматриваем импульс как скаляр. Подсознательно мы используем тот же эффект, отрывая туалетную бумагу: резкий рывок (в отличие от мягкого потягивания) отрывает бумагу, почти не заставив рулон вращаться. Дети, которые ещё не освоили этот важный навык, могут размотать весь рулон, пытаясь оторвать совсем чуть-чуть.

Несколько частиц. До сих пор мы обсуждали законы Ньютона для одной материальной точки. Но сложную систему (например гантель с двумя массами, космический корабль или кошку) надо рассматривать как систему из нескольких материальных точек. Каждая масса системы может взаимодействовать с другими, а также подвергаться действию внешней силы. Оказывается, что *центр масс системы из частиц ведёт себя как одна материальная точка в том смысле, что он подчиняется второму закону Ньютона:*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{A.11}$$

где m — полная масса системы, $\mathbf{F}$ — сумма всех внешних сил, а $\mathbf{a}$ — ускорение центра масс. Важно, что $\mathbf{F}$ не включает внутренние силы, то есть силы взаимодействия между частями системы; чуть ниже мы увидим, что эти силы сократятся благодаря третьему закону Ньютона.

Вывод равенства (А.11)**.** Сейчас мы запишем второй закон Ньютона для каждой частицы системы, просуммируем результаты и воспользуемся третьим законом Ньютона, чтобы сократить силы взаимодействия между частицами внутри системы.

На i-ю частицу действует внешняя сила, а также сумма сил от всех остальных частиц, кроме самой себя:

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{j\neq i}\mathbf{F}_i^j,$$

здесь $\mathbf{F}_i^j$ обозначает силу, действующую на i-ю частицу со стороны j-й частицы. По третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_i^j = -\mathbf{F}_j^i$. Следовательно, при сложении всех этих уравнений эти силы сократятся, ведь каждая пара $\mathbf{F}_i^j$ и $\mathbf{F}_j^i$ встречается ровно один раз в общей сумме. В результате получим

$$\sum_i m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{внеш}} = \mathbf{F},$$

что совпадает с нашим утверждением (A.11), если учесть соотношение (A.12), приведённое чуть ниже.

Замена частиц на их центр масс. *Суммарный импульс любой системы частиц равен импульсу её центра масс, наделённого суммарной массой всех частиц.*

Доказательство. Определение центра масс (A.8) удобно записывать как
$$m\mathbf{x} = \sum_i m_i \mathbf{x}_i. \tag{A.12}$$

Продифференцировав, получим
$$m\mathbf{v} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i.$$

И это всё доказывает, ведь левая часть представляет собой импульс центра масс, наделённого полной массой, а правая часть — суммарный импульс всей системы.

Второй закон Ньютона для системы из многих частиц имеет непосредственное следствие:

Закон сохранения импульса. *Если сумма внешних сил, действующих на систему частиц, равна нулю ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), то суммарный импульс системы остаётся постоянным.* В частности, центр масс системы либо покоится, либо движется с постоянной скоростью.

A.5 Момент силы

Рассмотрим силу F, приложенную к точке A. Выберем точку O — назовём её центром.

Момент силы F относительно центра O определяется как произведение расстояния OA на составляющую силы F в направлении, перпендикулярном к OA:
$$T = OA \cdot F_\perp = OA \cdot F \sin\theta. \tag{A.13}$$

Можно думать, что момент измеряет, насколько сильно наша сила закручивала бы гайку в центре. Заметим, что произведение $OA \cdot \sin\theta$ равно расстоянию D от точки O до линии действия силы, показанному на рисунке A.7. Поэтому момент силы можно записать как $T = F(OA\sin\theta)$, или
$$T = FD. \tag{A.14}$$

Другими словами, *момент силы есть произведение силы F на расстояние D от линии действия силы до O.*

До сих пор мы говорили о скалярном моменте. Сейчас мы увидим, что момент силы естественно описывается вектором.

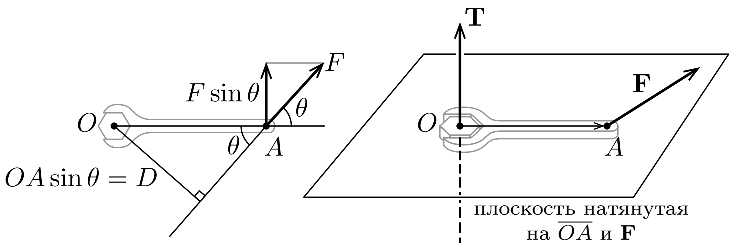


Рис. А.7: Определение момента силы.

Существует естественная *ось вращения* — прямая, перпендикулярная плоскости чертежа, то есть плоскости, натянутой на вектора $\overline{OA}$ и **F**. Вдоль этой прямой выбирается предпочтительное направление — а именно то, в котором будет продвигаться гайка с правой резьбой при закручивании силой. Векторный момент силы определяется как вектор в этом направлении, величина которого задаётся формулой (А.13). Иными словами, момент силы определяется как векторное произведение плеча и силы:

$$\mathbf{T} = \overline{OA} \times \mathbf{F}. \qquad \text{(A.15)}$$

На самом деле приведённое рассуждение естественно подводит к определению векторного произведения.

А.6 Момент импульса

Момент импульса M является вращательным аналогом импульса. Для материальной точки массы m, находящейся в точке P, момент импульса относительно точки O определяется как произведение $r(mv_\perp)$, где r — расстояние до O, а $v_\perp$ — проекция скорости в направлении, перпендикулярном OP.

Однако момент импульса обладает направлением и, следовательно, является вектором; то, что мы определяли до сих пор, — это его модуль. Направление этого вектора определяет «ось вращения», то есть прямую, перпендикулярную радиус-вектору **r** и вектору скорости **v**, как показано на рисунке А.8.

Строго говоря,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v},$$

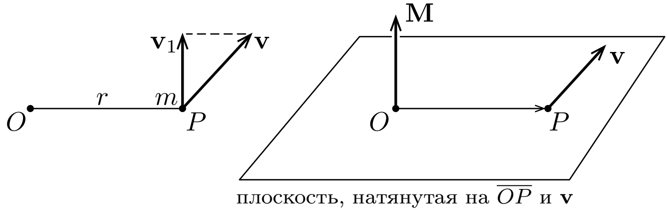


Рис. A.8: Определение момента импульса.

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, а символ $\times$ обозначает векторное произведение.

На самом деле предыдущие два абзаца объясняют, почему в курсах анализа и аналитической геометрии векторное произведение определяется именно так. Заметим, что второй множитель в приведённом выражении — это и есть импульс. Таким образом, *момент импульса является векторным произведением радиус-вектора и вектора импульса.*

Для системы из многих частиц момент импульса определяется как сумма всех моментов её частиц:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i. \qquad \text{(A.16)}$$

Закон сохранения момента импульса. *Если сумма внешних моментов сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы остаётся постоянным.*

В частности, если не трогать кошку, пока она падает, то её момент импульса не изменится, как бы она ни извивалась (мы пренебрегаем сопротивлением воздуха).

Прежде чем перейти к доказательству, я хотел бы подчеркнуть, что внутренние моменты сил — то есть моменты, создаваемые частицами системы друг на друга, — взаимно сокращаются, и поэтому при сложении всех моментов, действующих на все частицы, в сумме остаются только моменты внешних сил. Взаимное сокращение внутренних моментов видно из рисунка A.9. Рассмотрим плоскость, проходящую через начало координат O и две массы m_i и m_j. Силы $F_i^j = -F_j^i$ лежат в этой плоскости. Направления моментов, создаваемых этими силами относительно O, очевидно противоположны (оба они перпендикулярны плоскости рисунка). И для того чтобы эти моменты сократились, надо проверить, что их модули равны.

Согласно (A.14), величины моментов равны $T_j^i = DF_j^i$ и $T_i^j = DF_i^j$; важно отметить, что расстояние D (см. рисунок A.9) то же для обеих сил. Так как $F_i^j = F_j^i$ по третьему закону Ньютона, модули моментов равны. Это и доказывает, что внутренние моменты сил сокращаются.

Теперь перейдём к доказательству закона сохранения момента импульса. Желая показать, что $\mathbf{M}$ является постоянным вектором, продифференцируем его по времени в (A.16):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum \left(\underbrace{\mathbf{v}_i \times m_i\mathbf{v}_i}_{\mathbf{0}} + \mathbf{r}_i \times \underbrace{m_i\mathbf{a}_i}_{\mathbf{F}_i} \right) = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i, \tag{A.17}$$

где $\mathbf{F}_i$ обозначает сумму всех сил, действующих на i-ю частицу, как внешних, так и со стороны других частиц системы. Таким образом,

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^j.$$

Последний член представляет собой сумму всех внутренних моментов сил, действующих на i-ю частицу. Подставляя это выражение в (A.17), получаем, что внутренние моменты взаимно сокращаются (см. абзац выше). В результате остаётся

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{внеш}} = \mathbf{T}, \tag{A.18}$$

где $\mathbf{T}$ — сумма моментов сил, создаваемых внешними силами. В частности, $\mathbf{M} = \text{const}$ при $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Тем самым мы доказали, что момент импульса сохраняется, если сумма внешних моментов сил равна нулю.

Заметьте, что уравнение (A.18) является вращательным аналогом второго закона Ньютона.

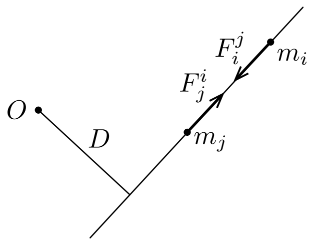


Рис. A.9: Сокращение моментов сил внутри системы.

A.7 Угловая скорость и центростремительное ускорение

Угловая скорость. Для точки, движущейся по окружности с центром в точке O, угловая скорость ω определяется как *скорость изменения угла θ между радиус-вектором точки и данным направлением* (см. рисунок A.10).

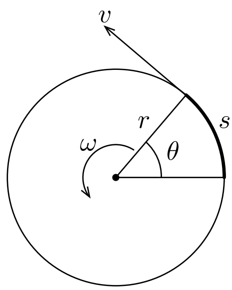


Рис. A.10: Определение угловой скорости.

Угловая и линейная скорость. Если точка движется по окружности с угловой скоростью ω, то её обычная скорость выражается формулой

$$v = \omega r, \tag{A.19}$$

где r — радиус окружности. Это следует из определения угловой меры: напомним, что радианная мера θ угла, соответствующего дуге окружности, равна длине s этой дуги, делённой на радиус окружности,

$$\theta = \tfrac{s}{r},$$

откуда $s = \theta r$. Так как s и θ прямо пропорциональны, их скорости изменения пропорциональны с тем же коэффициентом; это и доказывает формулу (A.19).

Центростремительное ускорение. Имеет ли точка, движущаяся с постоянной скоростью, нулевое ускорение? Вообще говоря, нет — это верно только если точка движется по прямой. Ускорение может вызываться изменением направления движения. Строго говоря, ускорение — это скорость изменения вектора скорости, и, следовательно, само является вектором. Для точки, движущейся по окружности с постоянной скоростью, ускорение направлено к центру и имеет величину

$$a_{\text{цен}} = \omega v. \tag{A.20}$$

Идея (прекрасная своей краткостью) в том, чтобы применить формулу $v = \omega r$ не к физической окружности, а к окружности, описываемой концом вектора скорости; см. рисунок А.11.

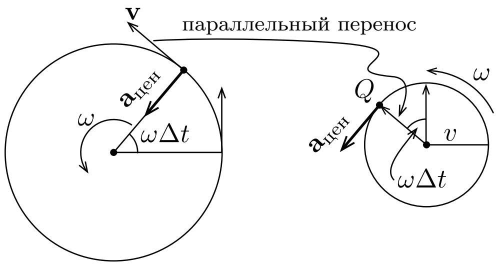


Рис. А.11: Нахождение центростремительного ускорения.

Если все векторы скорости v перенести так, чтобы они начинались в начале координат, то *их концы Q будут описывать окружность радиуса v с угловой скоростью ω* (той же самой, что у самой точки, ведь v и r всегда перпендикулярны). Следовательно, применив формулу (А.19) к окружности скоростей, получаем:

$$\underbrace{(\text{скорость точки } Q)}_{\mathbf{a}_{\text{цен}}} = \omega \cdot \underbrace{(\text{радиус окружности скоростей})}_{v},$$

то есть $a_{\text{цен}} = \omega v$, что и доказывает формулу (А.20).

Эквивалентные формулы. Подставив формулу (А.19) в (А.20), получим следующие выражения:

$$a_{\text{цен}} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}. \tag{A.21}$$

В большинстве учебников используются именно эти выражения, хотя формула (А.20) проще, и в некотором смысле главней.

Задача. Когда машина движется по кругу, шины сцепляются с дорогой с некоторой силой, удерживающей машину на дороге. Как изменится эта сила, если удвоить скорость?

Решение. Согласно формуле (А.21), сила учетверится.

Вопрос. А можно это увидеть без формул?

Ответ. Здесь срабатывают сразу две причины: при удвоении скорости вдвое увеличивается длина вектора скорости, и кроме того, вдвое возрастает скорость его поворота. В результате скорость движения конца этого вектора увеличивается в четыре раза, а это и есть центростремительное ускорение.

А.8 Центробежная и центростремительная силы

Представьте, что вы сидите на карусели, движетесь по окружности, или едете на машине по закруглённому съезду с шоссе. Кажется, будто какая-то невидимая сила тянет вас прочь от центра окружности. Это мнимая сила в том смысле, что на самом деле никто не тянет вас от центра; это лишь иллюзия, вызванная вашей инерционной склонностью двигаться прямо, которая противоречит повороту автомобиля. Эта мнимая сила называется *центробежной силой.* Однако усилие, которое пассажир прикладывает к машине в направлении от центра, вполне реально. Это усилие вполне правомерно можно назвать центробежной силой — хотя само оно не действует на тело пассажира.

Сила, которую машина прикладывает к вашему телу, заставляет вас двигаться по окружности. Эта сила направлена к центру окружности.[22] Эта реальная сила называется *центростремительной.* По второму закону Ньютона, эта сила равна $ma_{\text{цен}}$, где $a_{\text{цен}}$ — это центростремительное ускорение, задаваемое формулой (А.21). Таким образом, *центростремительная* сила выражается как

$$F_{\text{цен}} = ma_{\text{цен}} = m\frac{v^2}{r}.$$

А.9 Кориолисова и центробежная силы через комплексную экспоненту

Предварительные замечания. Сейчас я объясню, как с помощью комплексных чисел и нехитрого матанализа вывести и кориолисову, и центробежную силы. Начнём с нескольких утверждений о комплексных числах, которые нам потребуются.

[22]При условии, что вы движетесь с постоянной скоростью (не да́вите ни на газ, ни на тормоз).

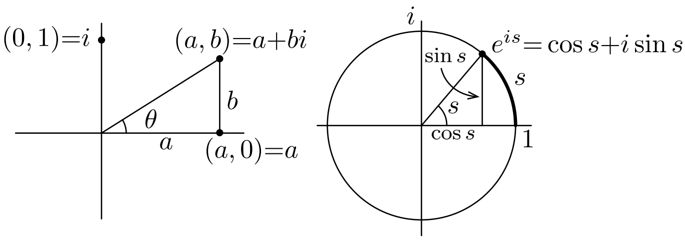


Рис. А.12: Комплексные числа и комплексная экспонента.

1. *Комплексное число* $a+ib$ — это просто точка (a,b) на плоскости; точки на оси x отождествляются с вещественными числами, так что вещественные числа являются подмножеством комплексных. Таким образом, можно написать $(a,0)=a$.

2. Угол между направлением оси x и радиус-вектором точки (a,b) называется *аргументом* числа $a+ib$, а расстояние $\sqrt{a^2+b^2}$ до начала координат называется его *модулем.*

3. По определению, два комплексных числа умножаются путём сложения их аргументов и умножения их модулей. В частности, $i=(0,1)$ имеет аргумент $\frac{\pi}{2}$ и модуль 1; следовательно, аргумент $i^2=i\cdot i$ равен $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, а модуль равен $1\times 1=1$. Таким образом, $i^2=(-1,0)=-1$.

4. Комплексная экспонента e^{is} определяется как точка $P(s)$ на единичной окружности с центром в начале координат, отстоящая по дуге на расстоянии s от положительного направления оси x (см. рисунок А.12). Напомним, что sin и cos определяются как координаты точки $P(s)$. Таким образом, по определению
$$e^{is}=\cos s+i\sin s,$$
что представляет собой знаменитую формулу Эйлера (его именем названо множество других формул).

Как повернуть точку? Пусть Z — точка на плоскости, тогда точка $e^{i\theta}Z$ получается из Z поворотом на угол θ вокруг начала координат. Действительно, длина $e^{i\theta}$ равна 1, а его аргумент равен θ. Следовательно, умножение на $e^{i\theta}$ не изменяет длину и прибавляет θ к его аргументу Z, то есть поворачивает Z на угол θ. Вскоре нам это пригодится.

Кориолисова и центробежная силы одним приёмом. Представим себе человека, идущего по вращающейся платформе. Пусть на земле задана система координат (x, y), а на платформе — другая система координат (X, Y) с общим началом в центре платформы (см. рисунок A.13). В момент $t = 0$ обе системы совпадают; при

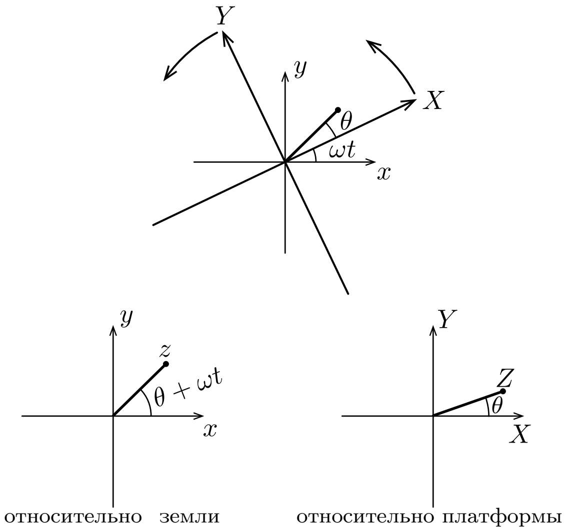


Рис. A.13: Кориолисова и центробежная силы с использованием комплексных чисел.

$t > 0$ система координат платформы поворачивается на угол ωt. Пусть $Z = (X, Y) \equiv X + iY$ — точка на платформе в момент времени t. Та же точка в системе, связанной с землёй, повернулась на угол ωt вокруг центра, поэтому её положение в земной системе координат задаётся выражением

$$z = e^{i\omega t} Z, \tag{A.22}$$

в соответствии с предыдущим рассуждением. Вычислим ускорение точки. Комплексные экспоненты дифференцируются по тем же правилам, что и вещественные. Продифференцировав дважды и приведя подобные слагаемые, получим

$$\ddot{z} = e^{i\omega t}\big(\ddot{Z} + 2i\omega\dot{Z} - \omega^2 Z\big).$$

Отсюда следует выражение для *мнимого* (наблюдаемого во вращающейся системе) ускорения частицы:

$$\ddot{Z} = \underbrace{e^{-i\omega t}\,\ddot{z}}_{\text{настоящее}}\ \underbrace{-\ 2\ i\ \omega\ \dot{Z}}_{\text{Кориолис}}\ \underbrace{+\ \omega^2\ Z.}_{\text{центробежное}}$$

Таким образом, помимо настоящего ускорения, вращающийся наблюдатель дополнительно испытывает кориолисово и центробежное ускорения. Заметим, что $i\dot{Z} \perp \dot{Z}$, поэтому ускорение Кориолиса действительно перпендикулярно скорости, что подтверждает наше интуитивное рассуждение.

A.10 Формула Ньютона — Лейбница

Теорема Ньютона — Лейбница утверждает, что для функции f, имеющей непрерывную производную и определённой на интервале $[a, b]$, выполняется равенство

$$\int\limits_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a). \tag{A.23}$$

Эквивалентная формулировка говорит, что

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x F(t)dt = F(x), \tag{A.24}$$

для любой непрерывной функции F. Я опущу доказательство этой теоремы (его можно найти в любом учебнике матанализа). Вместо этого приведу интуитивное объяснение равенства (A.23).[23]

Давайте думать, что $x = f(t)$ описывает положение точки, движущейся вдоль оси x. Тогда в обеих частях равенства (A.23) стоят два способа описания перемещения точки за время с $t = a$ до $t = b$.

В правой части (A.23) перемещение выражено как разность между конечной и начальной координатами точки. В левой части — как сумма бесконечно малых перемещений. Действительно, перемещение за малый промежуток времени Δt равно

$$\Delta x = v\Delta t = f'(t)\Delta t,$$

так как скорость почти не меняется за короткий промежуток времени. Полное перемещение, таким образом, есть интеграл — то есть предел сумм таких членов при $\Delta t \to 0$ (при их числе, стремящемся к бесконечности).

[23]Геометрическое объяснение равенства (A.24) можно найти, например, в моей книге [11].

Список литературы

[1] В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1974.

[2] Дж. Бэтчелор. *Введение в динамику жидкости.* Мир, 1973.

[3] D. Braess. „Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung“. *Unternehmensforschung* 12 (1968), S. 258–268. [Translated by D. Braess, A. Nagurney and T. Wakolbinger in *Transportation Science* 39, 446–450 (2005)].

[4] J. Eggers. «Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows». *Reviews of Modern Physics* 69.3 (июль 1997), с. 865—930.

[5] L. C. Epstein. *Thinking Physics: Practical Lessons in Critical Thinking.* San Francisco: Insight Press, 1992.

[6] H. G. Goldstein. *Classical Mechanics.* Reading, MA: Addison-Wesley, 1950.

[7] A. Grewal, P. Johnson, A. Ruina. “A chain that accelerates, rather than slows, due to collisions: how compression can cause tension”. *American Journal of Physics* 79.7 (July 2011), p. 723.

[8] C. P. Jargodzki, F. Potter. *Mad about Physics: Braintwisters, Paradoxes, and Curiosities.* New York: John Wiley & Sons, 2001.

[9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Механика.* 3-е изд. Т. 1. Курс теоретической физики. Москва: Физматлит, 2001.

[10] M. Levi. *Physica D* 132 (1999), p. 158.

[11] M. Levi. *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.

[12] M. Levi. *Inverted pendulum stabilized without feedback.* `https://youtu.be/cHTibqThCTU`. YouTube video. 2008.

[13] П. В. Маковецкий. *Смотри в корень!: Сборник любопытных задач и вопросов.* 4-е изд. Наука, 1979.

[14] M. M. Michaelis, T. Woodward. *American Journal of Physics* 59.9 (1991), pp. 816–821.

[15] M. Minnaert. *Light and Color in the Outdoors.* New York: Springer-Verlag, 1993.

[16] "Wind-Propeller Sails Proposed for Liners". *Modern Mechanix and Inventions* (Jan. 1935), p. 49.

[17] J. Munkres. *Topology.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2000.

[18] P. Nahin. *Number Crunching: Taming Unruly Computational Problems from Mathematical Physics to Science Fiction.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011.

[19] Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. *Динамика неголономных систем.* Москва: Наука, 1967.

[20] C. M. Penchina, L. J. Penchina. "The Braess paradox in mechanical, traffic, and other networks". *American Journal of Physics* (2003), pp. 479–482.

[21] Я. И. Перельман. *Занимательная физика. Книга 1 и Книга 2.* Москва: Детгиз, 1913/1916.

[22] E. J. Routh. *Dynamics of a System of Rigid Bodies.* Part 2, 4th ed. London: MacMillan and Co., 1884, pp. 299–300.

[23] A. Ruina. *A chain that pulls itself onto the table it falls on.* `http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/fallingchains/`. 2011.

[24] A. Stephenson. "On a new type of dynamical stability". *Manchester Memoirs* 52 (1908), p. 110.

[25] J. Walker. *The Flying Circus of Physics.* New York: John Wiley & Sons, 2007.

[26] G. H. Wolf. *Physical Review Letters* 24 (1970), pp. 444–446.