МАТЕМАТИКА

А. Д. Александров

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Введение

1. Во всяком пространстве, где определены геодезические линии, естественно назвать линейчатой поверхность, образованную геодезическими. Предмет настоящей работы составляют такие поверхности в метрических пространствах.

Линейчатая поверхность в эвклидовом пространстве имеет всюду неположительную кривизну. Это свойство обобщается на линейчатые поверхности в римановом пространстве в виде следующей теоремы: *Кривизна линейчатой поверхности не больше кривизны пространства*; точнее: *пусть F — регулярная линейчатая поверхность в римановом пространстве R, $K_F(A)$ — внутренняя кривизна поверхности F в точке A, а $K_R(A, F)$ — кривизна пространства R в той же точке A „вдоль поверхности F“, т. е. в направлении двумерного элемента, касающегося F; тогда имеет место неравенство*

$$K_F(A) \leqslant K_R(A, F). \tag{1}$$

В самом деле, кривизна сечения линейчатой поверхности вдоль образующей равна нулю, а потому экстремальные значения нормальных кривизн, т. е. главные кривизны k_1, k_2 не могут быть одного знака; так что $k_1 k_2 \leqslant 0$. Согласно же известному обобщению теоремы Гаусса ([5], стр. 176)

$$K_F = K_R + k_1 k_2, \tag{2}$$

откуда, ввиду $k_1 k_2 \leqslant 0$, и следует неравенство (1).

Результат данной работы состоит в обобщении указанной теоремы на линейчатые поверхности в метрических пространствах, подчиненных единственному условию, что каждая точка имеет окрестность, где любые две точки соединимы отрезком или, что то же самое, кратчайшей, т. е. кривой, длина которой равна расстоянию между ее концами. Ниже мы точно формулируем соответствующую теорему.

2. Мы будем постоянно рассматривать область R некоторого метрического пространства, любые две точки которой соединимы отрезком. Как сам отрезок, соединяющий точки A, B или X, Y и т. п., так и его длина, т. е. расстояние между этими точками, обозначаются одинаково: AB, XY и т. п.

Линейчатыми мы называем поверхности в R, составленные из отрезков, образующих поверхности. (Это определение будет уточнено ниже.)

Определение кривизны основывается на рассмотрении треугольников. Под *углом* мы здесь и всюду дальше понимаем *верхний угол*; например, угол α при вершине A треугольника ABC есть верхний угол между его сторонами AB, AC.[1]

Пусть T — треугольник в метрическом пространстве или на поверхности F. Обозначим α, β, γ его углы, а $\delta(T)$ — избыток, т. е. величину

$$\delta(T)=\alpha+\beta+\gamma-\pi. \tag{3}$$

Обозначим через T^0 плоский треугольник со сторонами той же длины, что и T, а через $S(T^0)$ — площадь треугольника T^0.

Введем понятие: *верхняя кривизна поверхности* F *в точке* A. Его можно определить формулой

$$\overline{K}_F(A)=\varlimsup_{T\to A}\frac{\delta(T)}{S(T^0)};$$

т. е. как верхний предел отношения $\frac{\delta(T)}{S(T^0)}$ для треугольников T на поверхности при условии, что треугольники сходятся к точке A. При этом для $\overline{K}$ допускаются значения $\pm\infty$. Точно так же определяется верхняя кривизна $K_R(A)$ пространства R в точке A, если под T понимать треугольники в R.

Эти определения обладают тем неудобством, что в них приходится исключать треугольники T, для которых $S(T^0)=0$, т. е. такие, у которых сумма двух сторон равна третьей. Поэтому для наших целей оказывается более удобным несколько дополнить эти определения.[2]

Именно, определим для треугольника T величину $K(T)$ — как бы усредненную его кривизну — следующим образом:

$$K(T)=\frac{\delta(T)}{S(T^0)} \text{ при } S(T^0)\neq 0,$$

$$K(T)=+\infty \text{ при } S(T^0)=0 \text{ и } \delta(T)>0,$$

$$K(T)=-\infty \text{ при } S(T^0)=0 \text{ и } \delta(T)\leqslant 0.$$

Верхнюю кривизну поверхности F в точке A определяем как

$$\overline{K}_F(A)=\varlimsup_{T\to A}K(T). \tag{4}$$

Введем еще понятие *верхней кривизны пространства* R *в точке* A *вдоль линейчатой поверхности* F. Эта величина, которую мы обозначаем $\overline{K}_R(A, F)$, определяется той же формулой (4), но с другими треугольниками T.

---

[1] Определение верхнего угла дано в [1] и воспроизведено также в [2]. Треугольник в R образуется тремя отрезками AB, AC, BC, а на поверхности F — кратчайшими AB, AC, BC на этой поверхности. Не исключается вырождение треугольника в отрезок (кратчайшую), но вершины A, B, C всегда считаются различными.

[2] В § 5 будет показано, однако, что это дополненное определение, допускающее к рассмотрению любые треугольники T, равносильно данному, кроме одного случая, когда в некоторой окрестности точки A для всех треугольников T площадь $S(T^0)=0$. Но в этом случае, как будет показано, окрестность точки A сводится к кратчайшей.

Будем говорить, что *треугольник T в R опирается на линейчатую поверхность F*, если его вершины лежат на F и к тому же одна из его сторон лежит на образующей поверхности F. Будем далее говорить, что треугольник $T = ADE$ отсекается от треугольника $T_0 = ABC$, если он образован отрезками AD, AE сторон AB, AC этого последнего и отрезком DE (не исключая, что $D = B$, $E = C$).

Величина $\overline{K}_R(A, F)$ определяется формулой

$$\overline{K}_R(A, F) = \overline{\lim_{T \to A}}\, K(T), \tag{5}$$

где T — треугольники, отсекаемые от треугольников, опирающихся на F; причем для $\overline{K}_R(A, F)$ допускаются, как и для $\overline{K}_F(A)$, значения $\pm\infty$.

(В случае регулярной линейчатой поверхности F в римановом пространстве R треугольники T, опирающиеся на F и сходящиеся к точке A, сходятся по направлению к двумерному элементу, касающемуся F в точке A. Поэтому в этом случае величина $\overline{K}_R(A, F)$ есть кривизна пространства R в направлении этого двумерного элемента.)

Наше определение величины $\overline{K}_R(A, F)$ касается только линейчатых поверхностей F. Можно освободиться от этого ограничения. Одна из таких возможностей будет рассмотрена в § 5.

3. Теперь мы можем формулировать наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть F — линейчатая поверхность в метрическом пространстве R, в котором каждая точка имеет окрестность, любые две точки которой соединимы отрезком. Тогда в любой точке A поверхности F имеет место неравенство*

$$\overline{K}_F(A) \leqslant \overline{K}_R(A, F). \tag{6}$$

Тот факт, что теорема 1 относится к чрезвычайно общим метрическим пространствам, не имеет особого значения, так как, вообще говоря, в общем метрическом пространстве $\overline{K}_R(A, F) = \infty$, а тогда неравенство (6) тривиально.[1] Оно имеет значение при условии конечности кривизны $\overline{K}_R$. В связи с этим введем следующее определение.

Будем говорить, что *метрическое пространство R имеет кривизну $\leqslant K$*, если: 1) каждая его точка имеет окрестность, любые две точки которой соединимы отрезком; 2) в каждой точке X, $\overline{K}_R(X) \leqslant K$.

Из теоремы 1 очевидно следует

Теорема 2. *Линейчатая поверхность в пространстве с кривизной $\leqslant K$ сама оказывается в смысле ее внутренней метрики пространством с кривизной $\leqslant K$ (если только она вообще имеет внутреннюю метрику).*

Понятие пространства с кривизной $\leqslant K$ было введено мною в [2], но данное там определение отлично от только что высказанного. Мы воспроизведем его в § 2. Имеет место эквивалентность обоих определений, но она не будет нам нужна, так как мы независимо от

---

[1] Например, на плоскости с метрикой Минковского (когда за круг принята центрально симметричная выпуклая область, отличная от эллипса) всюду $\overline{K} = \infty$. Вообще, финслерово пространство, в каждой точке X которого, $\overline{K} < +\infty$ оказывается римановым.

этого докажем теорему 2 для пространств с кривизной $\leqslant K$ в смысле определения, данного в [2].

4. Понятие линейчатой поверхности как поверхности, образованной непрерывным семейством отрезков A_tB_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, можно уточнить следующим образом.

Линейчатая поверхность F в R определяется непрерывным отображением прямоугольника, в частности, квадрата $Q\,(0 \leqslant t,\ s \leqslant 1)$ в пространство R: $(t,\ s) \to X\,(t,\ s)$ при следующих условиях.

1) Образ каждой линии $t = \text{const}$ есть отрезок (не исключается его вырождение в точку); обозначаем концы отрезка $X\,(t,\ 0) = A_t$, $X\,(t,\ 1) = B_t$.

2) Нет такого интервала $(t_1,\ t_2)$, на котором все отрезки A_tB_t сводились бы к точкам (так что поверхность сводилась бы здесь к кривой) или совпадали.

3) Два отображения $X\,(t,\ s)$, $Y\,(u,\ v)$ прямоугольников Q и P определяют одну и ту же поверхность тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга топологическим соответствием прямоугольников Q и P, при котором линии $t = \text{const}$ соответствуют линиям $u = \text{const}$.

Так как отображение $X\,(t,\ s)$ не предполагается взаимно однозначным, то поверхность допускает особенности, прежде всего самопересечения. Поэтому под точкой поверхности понимается, согласно обычному в этом случае условию, не просто точка пространства F, но скорее пара: точка $X\,(t,\ s) \in R$ и точка $(t,\ s)$ квадрата Q. Соответственно, под кривой на поверхности F понимается непрерывное однопараметрическое множество таких пар. Точно так же отрезки A_tB_t при разных t считаются различными, хотя бы они и совпадали.

К условиям 1—3 можно добавить еще следующее.

4) Если две точки X, Y поверхности F не только совпадают, но в квадрате Q существует соединяющая их прообразы кривая, целиком отображающаяся в точку $X = Y$, то такие точки отождествляются. (Пример представляет двойной конус, образованный отрезками, середины которых лежат в одной точке A. Такая точка считается за одну точку поверхности.)

Если любые две точки поверхности F соединимы на F кривой конечной длины (для чего достаточно, чтобы существовала хотя бы одна такая кривая, пересекающая все образующие), то для каждой пары точек X, Y на F определяется их расстояние $\rho_F(XY)$ на поверхности F, как точная нижняя граница длин соединяющих эти точки кривых. По компактности поверхности эта точная нижняя граница достигается, так что любые две точки соединимы на поверхности кратчайшей. Из условия 4 легко заключить, что для различных точек это расстояние отлично от нуля. Поэтому поверхность оказывается метрическим пространством с внутренней метрикой $\rho_F\,(XY)$. Понятия сходимости, окрестности и т. п. на F относятся к этому метрическому пространству.

Может, однако, случиться, что точки на разных образующих не соединяются кривой конечной длины и тогда поверхность не имеет внутренней метрики. Пример представляет цилиндр с неспрямляемой плоской кривой, например, с кривой Вейерштрасса, в качестве направляющей. Такая поверхность, с точки зрения ее внутренней геометрии, должна рассматриваться как „метрически несвязная“. Расстояние ρ_F определяется лишь для точек, соединимых кривой конечной длины, и поверхность с точки зрения ее внутренней геометрии распадается на „метрически связные“ компоненты, в каждой из которых определено расстояние ρ_F. Для указанного только что „вейерштрассова“ цилиндра такими компонентами оказываются образующие. Если какая-либо образующая поверхности F сама оказывается компонентной поверхности, то окрестность любой ее точки A сводится к отрезку образующей. В ней все треугольники T вырождаются в отрезки, так что для них $S(T^0)=0$, $\delta(T)=0$, а потому $\overline{K}_F(A)=-\infty$, и утверждение теоремы 1 оказывается тривиальным. Поэтому можно в дальнейшем исключить поверхности с такими „изолированными“ образующими.

Если же компонента не сводится к образующей, то она, как очевидно, сама представляет некоторую линейчатую поверхность. На ней по самому определению метрически связной компоненты любые две точки соединимы кривой конечной длины, и она имеет поэтому внутреннюю метрику. Поэтому нам достаточно ограничиться поверхностями, для которых выполнено также следующее условие.

5) Поверхность имеет внутреннюю метрику (для чего, как уже отмечалось, достаточно, чтобы на ней имелась кривая конечной длины, пересекающая все образующие).

Все наши выводы могут теперь относиться к линейчатым поверхностям с условиями 1—5, а понятия точки на поверхности, сходимости и пр. будут пониматься в определенном выше смысле.

5. Наши теоремы о линейчатых поверхностях имеют интерес не только сами по себе, как освобожденные от всяких требований регулярности обобщения соответствующих теорем для регулярных линейчатых поверхностей в римановых пространствах, но также благодаря тем приложениям, которые находят линейчатые поверхности в целом ряде геометрических задач.

Характер этих приложений можно видеть на простых примерах. Например, известна теорема Фенхеля о том, что интегральная кривизна замкнутой кривой в эвклидовом пространстве не меньше 2π [6]. Эта теорема легко доказывается для кривых в римановом пространстве неположительной кривизны.

Пусть L — замкнутая кривая в таком пространстве, k — ее кривизна, s — длина дуги. Натянем на L линейчатую поверхность F, например, соединяя отрезками одну из точек кривой L со всеми другими. Если k_g геодезическая кривизна кривой L на поверхности F, то $k_g \leqslant k$, и потому для интегральных кривизн или, как мы говорим, поворотов, τ_g, τ имеем такое же неравенство $\tau_g \leqslant \tau$. По теореме Гаусса-Боннэ $\tau_g = 2\pi - \omega$, где ω — интегральная кривизна поверхности F. Но в пространстве неположительной кривизны линейчатая поверхность также имеет неположительную кривизну. Поэтому $\omega \leqslant 0$ и, следовательно, $\tau_g \geqslant 2\pi$. Но так как $\tau \geqslant \tau_g$, то тем более $\tau \geqslant 2\pi$, что и требовалось доказать.

Применяя такого рода рассуждения к кривым в общих пространствах с кривизной, не большей данного K, можно получить ряд общих теорем о кривых в этих пространствах.

Другой пример представляет теорема о том, что в пространстве с кривизной $\leqslant K$ на замкнутую кривую можно натянуть поверхность с площадью, не большей площади круга с окружностью той же длины на поверхности постоянной кривизны K. (Предполагается, что при $K>0$ длина кривой $<\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.) Такой поверхностью может служить линейчатая поверхность, натянутая на данную кривую.[1] Кривизна ее не больше K, а, как известно, односвязная поверхность с кривизной $\leqslant K$, ограниченная кривой длины l, имеет площадь, не бóльшую площади круга с окружностью l на поверхности постоянной кривизны K [3]. Для применения этого рассуждения в случае спрямляемой замкнутой кривой в общем пространстве с кривизной $\leqslant K$ нужно только освободиться от некоторых условий регулярности.

Таким применениям линейчатых поверхностей будет посвящена следующая работа.

§ 2. Сведение теоремы 1 к некоторой теореме 3

1. Будем называть K-плоскостью поверхность постоянной кривизны K. Точнее, K-плоскость будет эвклидовой плоскостью при $K=0$, плоскостью Лобачевского при $K<0$, открытой полусферой при $K>0$.

Пусть T — треугольник в метрическом пространстве; а T^K — треугольник на K-плоскости, имеющий стороны той же длины. Мы будем говорить, что T^K есть треугольник на K-плоскости, соответствующий треугольнику T. (Допускается, что треугольник T^K вырождается в отрезок.)

Если $K \leqslant 0$, то каков бы ни был треугольник T, соответствующий треугольник T^K всегда существует, так как в этом случае для существования треугольника T^K с данными сторонами достаточно выполнения „неравенств треугольника“: каждая сторона не меньше суммы двух других. Если же $K>0$, то необходимо еще требовать, чтобы периметр был меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$. Это условие (при $K>0$) неизменно будет подразумеваться выполненным. Для этого достаточно всякий раз ограничиваться достаточно малой областью пространства.

Мы будем постоянно сравнивать соответственные углы треугольников T и T^K, обозначая их α, β, γ и α^K, β^K, γ^K. Основную теорему 1, формулированную в § 1, мы сведем к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть F — линейчатая поверхность в метрическом пространстве R, причем любые две точки поверхности F соединимы в R отрезком. Пусть, далее, число K таково, что для каждого треугольника T, опирающегося на F, его углы не больше, чем соответственные углы треугольника T^K, соответствующего T на K-плоскости. При этом условии то же верно для треугольников T_F на поверхности F, т. е. углы любого такого треугольника T_F соответственно не больше углов треугольника T_F^K, соответствующего T_F на K-плоскости.*

2. Докажем, что *из теоремы 3 следует теорема 1* в такой очевидно, эквивалентной формулировке: если $K_R(A, F) \leqslant K$, то также $\overline{K}_F(A) \leqslant K$. (В этой формулировке исключается случай $\overline{K}_R = \infty$, но именно в этом случае неравенство $\overline{K}_F \leqslant \overline{K}_R$ тривиально.)

[1] Это замечание воспроизводит по существу простую идею доказательства теоремы Карлемана о том, что площадь минимальной поверхности, натянутой на контур длины l, не больше площади круга с периметром l. Это доказательство, как и некоторые другие применения такого рода построений линейчатых (точнее развертывающихся поверхностей), можно найти в курсе Бляшке [4], § 112, 39.

Итак, допустим, что в точке A

$$\overline{K}_R(A,\ F) < K. \tag{1}$$

В силу определения величины $\overline{K}_R$ это означает, что при произвольно заданном $\varepsilon > 0$ для всех достаточно близких к A треугольников T, опирающихся на F и отсекаемых от них, выполняется неравенство

$$\delta(T) \leqslant (K+\varepsilon)\, S(T^0). \tag{2}$$

Положим $K' = K + 2\varepsilon$.

Как известно, для малых треугольников T^0, $T^{K'}$ с равными сторонами разность площадей относительно мала, т. е.

$$\left| S(T^0) - S(T^{K'}) \right| \leqslant \varkappa S(T^0), \tag{3}$$

где $\varkappa \to 0$ вместе с диаметром треугольника T^0.

Отсюда можно заключить, что для треугольников T, близких к точке A, из неравенства (2) следует

$$\delta(T) \leqslant (K+2\varepsilon) S(T^{K'}) = K' S(T^{K'}). \tag{4}$$

Здесь $K'S(T^{K'})$ есть не что иное как избыток $\delta(T^{K'})$ треугольника $T^{K'}$. Таким образом, если α, β, γ — углы T, а $\alpha^{K'}$, $\beta^{K'}$, $\gamma^{K'}$ — углы $T^{K'}$, то (4) сводится к неравенству

$$\delta^{K'}(T) = (\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha^{K'} + \beta^{K'} + \gamma^{K'}) \leqslant 0. \tag{5}$$

Эта величина $\delta^{K'}(T)$ есть относительный избыток треугольника T „по отношению кривизны K'".

Таким образом, неравенство (5) означает, что у каждого треугольника T, отсекаемого от опирающегося на F достаточно близко к точке A, избыток „по отношению кривизны K'" неположителен.

В [2] была доказана общая теорема: если $\nu^{K'}(T)$ означает точную верхнюю границу относительных избытков треугольников, отсекаемых от данного треугольника T, то для каждой пары соответственных углов T и $T^{K'}$ выполняются неравенства: $\alpha - \alpha^{K'} \leqslant \nu^{K'}$ и т. п.

В данном случае для каждого опирающегося на F и достаточно близкого к A треугольника оказывается $\nu^{K'} \leqslant 0$, и потому

$$\alpha \leqslant \alpha^{K'},\quad \beta \leqslant \beta^{K'},\quad \gamma \leqslant \gamma^{K'}. \tag{6}$$

Это означает, что в окрестности точки A выполнено условие теоремы 3. Поэтому, принимая эту теорему, заключаем, что и для треугольников T_F на поверхности F в окрестности точки A верны такие же неравенства (6) между углами треугольников T_F и $T_F^{K'}$. Из этих неравенств следует, что

$$(\alpha+\beta+\gamma-\pi) - (\alpha^{K'} + \beta^{K'} + \gamma^{K'} - \pi) = \delta(T_F) - \delta(T_F^{K'}) \leqslant 0. \tag{7}$$

Но

$$\delta(T_F^{K'}) = K' S(T_F^{K'}),$$

и потому из (7) следует, что

$$\delta(T_F) \leqslant K'S(T_F^{K'}). \tag{8}$$

Так как для малых треугольников T^0 и $T^{K'}$ с равными сторонами относительная разность площадей мала, то для T_F, достаточно близких к A, из (8) следует

$$\delta(T_F) \leqslant (K' + \varepsilon) S(T_F^0). \tag{9}$$

Это неравенство, в силу самого определения верхней кривизны $\overline{K}_F(A)$, означает, что

$$\overline{K}_F(A) \leqslant K' + \varepsilon = K + 3\varepsilon. \tag{10}$$

Но так как ε произвольно, то оказывается, что

$$\overline{K}_F(A) \leqslant K.$$

Таким образом доказано, что при выполнении теоремы 3 из неравенства (1) $\overline{K}_R(A, F) \leqslant K$ следует, что $\overline{K}_F(A) \leqslant K$, т. е. что из теоремы 3 следует теорема 1 § 1.

3. Пространство с кривизной $\leqslant K$ было определено в [2] как метрическое пространство, в котором каждая точка имеет окрестность G со следующими свойствами:

1) любые две точки из G соединимы отрезком,

2) у всякого треугольника $T \subset G$ относительный избыток $\delta^K(T) \leqslant 0$.

Там же было доказано (простой ссылкой на использованную выше общую теорему об углах треугольника), что для всякого треугольника $T \subset G$ углы не больше углов соответствующего треугольника T^K на K-плоскости. Поэтому из теоремы 3 непосредственно вытекает

Теорема 4. *Линейчатая поверхность F в пространстве с кривизной $\leqslant K$ (в смысле данного определения) сама является пространством с кривизной $\leqslant K$ (если только она вообще имеет внутреннюю метрику).*

В дальнейшем остается доказать теорему 3.

§ 3. Геометрия конечных последовательностей отрезков

1. Теорему 3 мы будем доказывать своеобразным методом приближения линейчатой поверхности конечной последовательностью ее образующих. Соответственно, в этом параграфе мы рассмотрим конечные последовательности отрезков в метрическом пространстве, с принятым нами условием, что речь идет об области, любые две точки которой соединимы отрезком.

Последовательность отрезков $\{L_i\}$ есть не что иное как упорядоченная совокупность отрезков $L_1, L_2, \ldots, L_n$, причем их нумерация фиксирует их порядок, так что L_k лежит между L_{k-p} и L_{k+q}. Не исключается не только пересечение отрезков, а даже их полное совпадение, но в этом случае они не должны быть соседними (L_k и L_{k+1}). Не исключается также, что некоторые отрезки вырождаются в точки.

Пусть точка A лежит на L_k и B на L_{k+l}. Рассматриваем ломаные, соединяющие A с B и пересекающие *последовательно* отрезки $L_{k+1}, \ldots, L_{k+l-1}$. Точную нижнюю границу длин таких ломаных естественно назвать расстоянием между A и B на $\{L_i\}$, а ломаную, реализующую этот минимум длины, — кратчайшей AB на $\{L_i\}$.

Легко доказать, что *кратчайшая* AB *на* $\{L_i\}$ *существует.* В самом деле, ломаная с данными концами и вершинами на данных отрезках L_i определяется положением этих вершин. Длина ломаной непрерывно зависит от положения вершин и, как непрерывная функция конечного числа переменных, меняющихся в замкнутых промежутках, достигает минимума.

Будем говорить, что треугольник T в пространстве R опирается на $\{L_i\}$, если одна его сторона лежит на одном из отрезков L_k, а противоположная вершина на соседнем отрезке L_{k+1} или L_{k-1}. Далее, под треугольником ABC на $\{L_i\}$ естественно понимается фигура, образованная кратчайшими на $\{L_i\}$, соединяющими три различные точки A, B, C на отрезках из $\{L_i\}$.[1]

Мы докажем, в частности, следующую теорему, вполне аналогичную теореме 3 § 2.

Теорема 5. *Если при некотором данном K углы всякого треугольника T, опирающегося на $\{L_i\}$, не больше соответствующих углов треугольника T^K со сторонами той же длины на K-плоскости, то то же верно для всякого треугольника на* $\{L_i\}$. (Как всегда подразумевается, что при $K > 0$ периметр треугольника меньше $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.) Заметим, что условие этой теоремы автоматически выполняется в пространстве с кривизной $\leqslant K$ (в смысле определения § 2).

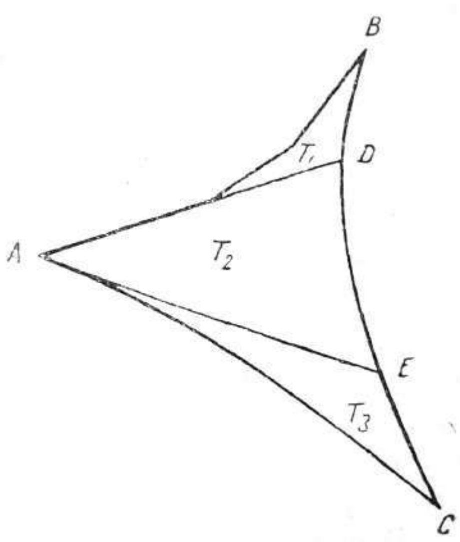

Рис. 1.

2. В дальнейшем мы неоднократно воспользуемся одним простым утверждением геометрии на K-плоскости, которое мы сейчас формулируем и докажем.

Назовем вогнутым треугольником ABC фигуру на K-плоскости, образованную тремя выпуклыми дугами $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$, расположенными так, что выпуклые фигуры, ограничиваемые ими вместе с отрезками AB, AC, BC, содержатся в (обыкновенном!) треугольнике ABC и не имеют общих внутренних точек. Дуги $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ называются сторонами, точки A, B, C — вершинами. Так как выпуклая кривая в каждой точке имеет односторонние касательные, то наши дуги имеют касательные в точках A, B, C. Углы между этими касательными мы называем углами вогнутого треугольника ABC. Не исключается, что дуги $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ сводятся к отрезкам. На рис. 1 дан пример вогнутого треугольника. Нас будут фактически интересовать только вогнутые треугольники, ограниченные ломаными. При $K > 0$ предполагается, что периметр вогнутого треугольника $< \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

---

[1] Если отрезки L_p, L_q пересекаются в точке A, то она считается за две: одна на L_p, другая — на L_q, если только в ней не пересекаются все отрезки между L_p и L_q $(L_{p+1}, \ldots, L_{q-1})$.

Для каждого вогнутого треугольника существует обычный треугольник со сторонами той же длины; он получается как бы «распрямлением» сторон вогнутого треугольника. В самом деле, каждая из сторон вогнутого треугольника не больше суммы двух других, так как она выпукла, а две другие ее охватывают. Вместе с условием, что при $K>0$ периметр $< \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$, это обеспечивает существование треугольника со сторонами данной длины.

Лемма 1. *Углы вогнутого треугольника меньше соответствующих углов прямолинейного треугольника со сторонами той же длины* (кроме, конечно, того случая, когда вогнутый треугольник оказывается прямолинейным).

Доказательство. Пусть $T=ABC$ — вогнутый треугольник (не сводящийся к прямолинейному). Докажем, например, что при распрямлении его сторон угол A увеличивается. Проведем касательные к сторонам $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ в точке A, и пусть они пересекают сторону $\widehat{BC}$ в некоторых точках D, E.

Наш треугольник T оказывается разбитым на три вогнутых треугольника T_1, T_2, T_3 с общей вершиной A. Не исключено, что треугольники T_1, T_3 могут сводиться к отрезкам AB, AC. Во всяком случае их углы A_1, A_3 при вершине A равны нулю. Поэтому, если мы распрямим стороны треугольников T_1, T_3, то углы A_1, A_3 заведомо не уменьшатся. (Они увеличиваются, если треугольники не сводятся к отрезкам.) После этого мы получим многоугольник, составленный из T_2 и приложенных к нему по сторонам AD, AE распрямленных треугольников T_1, T_3. Его стороны AB, AC — прямые, а $\widehat{BC}$ — кривая. Поэтому при ее распрямлении угол A заведомо увеличивается.

В результате мы получаем распрямленный треугольник ABC и так как при обоих проведенных деформациях угол A увеличивался, то он больше, чем в исходном вогнутом треугольнике.

3. Вернемся теперь к рассмотрению некоторой последовательности отрезков $\{L_i\}$ в метрическом пространстве.

Лемма 2. *У кратчайшей AB на $\{L_i\}$ любые два звена $C_{i-1}C_i$, C_iC_{i+1}, встречающиеся в точке C_i на отрезке L_i, образуют с любой из частей этого отрезка, исходящей из C_i, углы, в сумме не меньшие π* (напоминаем, что под углом понимается верхний угол). Если точка C_i лежит внутри отрезка L_i, то имеются две исходящие из C_i части этого отрезка; если же C_i есть конец отрезка L_i, то — одна; утверждение лишается смысла, если L_i сводится к точке.

Доказательство. Представим себе, что точки C_{i-1}, C_{i+1} на отрезках L_{i-1}, L_{i+1} фиксированы, а точка C_i может перемещаться по отрезку L_i. Положение ее определится расстоянием x от одного из концов отрезка L_i. Обозначим через z_1 и z_2 длины отрезков $C_{i-1}C_i$, C_iC_{i+1}. Пусть далее ξ_1, ξ_2 — углы, образуемые этими отрезками с частью отрезка L_i, идущей из C_i в направлении возрастания x. (Так как направление отсчета x можно выбрать в любую сторону, то тут нет никакого ограничения). Согласно теореме, доказанной в [2], правые верхние производные от z_1 и z_2 связаны с углами ξ_1, ξ_2 неравенствами:

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)_{\text{п. в}} \leqslant -\cos\xi_1, \quad \left(\frac{dz_2}{dx}\right)_{\text{п. в}} \leqslant -\cos\xi_2.$$

Поэтому

$$\left[\frac{d(z_1+z_2)}{dx}\right]_{\text{п. в}} \leqslant -(\cos\xi_1+\cos\xi_2). \tag{1}$$

Для кратчайшей AB сумма z_1+z_2 достигает минимума, и потому

$$\left[\frac{d(z_1+z_2)}{dx}\right]_{\text{пр}} \geqslant 0.$$

Вместе с (1) это дает $\cos\xi_1+\cos\xi_2 \leqslant 0$, что вместе с условием $0 \leqslant \xi_1, \xi_2 \leqslant \pi$ влечет за собой $\xi_1+\xi_2 \geqslant \pi$, что и требовалось доказать.

4. Дальше мы будем предполагать, что выполнено условие теоремы 5: при некотором данном K углы треугольников, опирающихся на $\{L_i\}$, не больше, чем у соответствующих треугольников T^K.

Лемма 3. *Если для $\{L_i\}$ выполнено условие теоремы 5, и две точки A, B на соседних отрезках L_p, L_{p+1} соединимы двумя отрезками AB, $\overline{AB}$, то углы между этими отрезками в точках A и B равны нулю.*

Доказательство. Допустим, что угол между AB и $\overline{AB}$ в точке A есть $\alpha > 0$. Возьмем точку C на L_{p+1} и рассмотрим оба треугольника ABC, один T со стороной AB, другой $\overline{T}$ со стороной $\overline{AB}$. Пусть их углы при A будут α_1, $\overline{\alpha}_1$, а $\alpha_1^K=\overline{\alpha}_1^K$ — углы соответствующих треугольников на K-плоскости. Они равны, так как у треугольников T, $\overline{T}$ стороны равны.

Задав какое-либо $\varepsilon > 0$, можно взять точку C столь близкой к B, что окажется

$$\alpha_1^K=\overline{\alpha}_1^K<\varepsilon. \tag{2}$$

А так как треугольники T, $\overline{T}$ опираются на $\{L_i\}$, то, по условию, $\alpha_1 \leqslant \alpha_1^K$, $\overline{\alpha}_1 \leqslant \overline{\alpha}_1^K$, так что вследствие (2)

$$\alpha_1+\overline{\alpha}_1<2\varepsilon. \tag{3}$$

По общей теореме об углах между тремя отрезками, исходящими из одной точки (см. [1], гл. IV, § 1), будет $\alpha_1+\overline{\alpha}_1 \geqslant \alpha$. Поэтому из (3) следует, что $\alpha < 2\varepsilon$, и так как ε произвольно, то $\alpha=0$.

Замечание. Может случиться, что две точки A, B, лежащие на одном отрезке L_p, соединяются двумя отрезками: частью AB отрезка L_p и каким-то другим отрезком $\overline{AB}$. Такую возможность можно исключить из рассмотрения, если условиться всегда соединять такие точки только частью отрезка L_p. Однако, если распространить условие теоремы 5 на треугольники с вершинами на одном отрезке, то тогда само собой окажется, что углы между AB и $\overline{AB}$ равны нулю, так что в отношении углов не имеет значения, какой из этих отрезков рассматривать.

5. Лемма 4. Пусть для $\{L_i\}$ выполнено условие теоремы 5. Пусть точки A, B лежат на отрезках L_p, L_q, причем $p<q$. Тогда точки $D_1, D_2, \ldots$, в которых кратчайшая AB пересекает отрезки L_{p+1}, $L_{p+2}, \ldots$, однозначно определены $\left(\text{если только при } K>0 \text{ длина } AB<\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)$. Можно сказать, что *кратчайшая AB на $\{L_i\}$ единствен-*

на с точностью до возможного разветвления между соседними точками C_i, C_{i+1} (так что между C_i и C_{i+1} есть два или больше разных отрезков, что вполне возможно, как показывают простые примеры).

Доказательство. Допустим, что между точками A, B есть две кратчайшие, которые, идя от A, впервые расходятся в некоторой точке A_0 (на отрезке L_k) и снова сходятся в точке B_0 на отрезке L_m, пересекая промежуточные отрезки в разных точках. (Не исключается, конечно, что $A_0 = A$, $B_0 = B$.) Таким образом, мы имеем две кратчайшие A_0B_0, $\overline{A_0B_0}$, пересекающие отрезки $L_{k+1}, L_{k+2}, \dots$ в разных точках D_1, E_1, D_2, E_2 и т. д. (рис. 2).

Соединяя отрезками точку D_1 с E_2, D_2 с E_3 и т. д. получим треугольники $A_0D_1E_1$, $D_1E_1E_2$ и т. д. Так получаем как бы натянутую между кратчайшими AB, $\overline{AB}$ последовательность треугольников t_j, опирающихся на $\{L_i\}$.

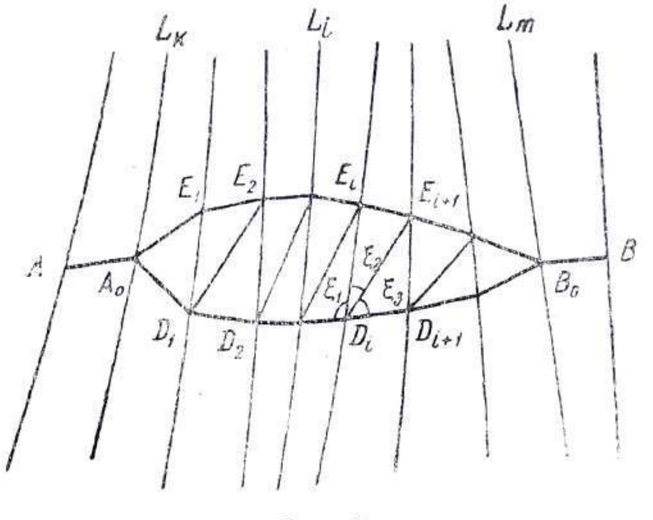

Рис. 2.

Сопоставляя каждому треугольнику t_j соответствующий треугольник t_j^K на K-плоскости и прикладывая их друг к другу соответственными сторонами, получим многоугольник P, ограниченный двумя ломаными A_1B_1 и $\overline{A_1B_1}$, соответствующими кратчайшим A_0B_0 и $\overline{A_0B_0}$.

Сумма углов треугольников t_j, сходящихся в одной вершине D_i или $\overline{E_i}$ будет $\geqslant \pi$. В самом деле, обозначим, например, углы при D_i через ξ_1, ξ_2, ξ_3, как на рис. 2. Согласно общей теореме сложения углов ([1], гл. IV § 1) $\xi_2 + \xi_3 \geqslant \eta$, где η — угол между L_i и отрезком D_iD_{i+1}.

С другой стороны, по лемме 2, $\xi_1 + \eta \geqslant \pi$ и, следовательно, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \geqslant \pi$.

Так как углы треугольников t_j^K не меньше углов треугольников t_j, то тем более сумма углов треугольников t_j^K при одной вершине будет $\geqslant \pi$. Это значит, что ломаные A_1B_1 и $\overline{A_1B_1}$, ограничивающие многоугольник P, обе выпуклы и обращены выпуклостью внутрь P. Но это явно невозможно, если $K \leqslant 0$ и при $K > 0$ также невозможно, если длины ломаных $< \frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Этим лемма доказана.

6. Теорема 5′. *Если при некотором K углы каждого треугольника T, опирающегося на $\{L_i\}$, не больше углов соответствующего треугольника T^K, то аналогичное верно так же для треугольников на $\{L_i\}$.*

Доказательство. Если все три вершины треугольника ABC на $\{L_i\}$ лежат на одном отрезке, то для него утверждение тривиально.

Допустим, для определенности, что вершина A лежит на отрезке L_p, а вершины B и C на отрезках L_q и L_r, причем $p < q \leqslant r$.

Предположим сначала, что стороны AB, AC нигде не встречаются на отрезках L_k между L_p и L_q, так же как и стороны AC, BC не встречаются на отрезках L_i между L_q и L_r. (Если $q=r$, так что $L_q=L_r$, то последнее условие отпадает за отсутствием отрезков L_i. Дальше мы не будем оговаривать случай, когда B и C лежат на одном отрезке, так как он проще общего случая $q<r$.)

Пусть стороны AB, AC пересекают отрезки L_k в точках D_k, E_k (причем $D_q=B$), а стороны AC, BC пересекают отрезки L_i между L_q и L_r в точках E_i, F_i (рис. 3).

Проводя отрезки D_kE_{k+1}, а также F_iE_{i+1}, получим как бы натянутую на треугольник ABC последовательность треугольников t_j, опирающихся на $\{L_i\}$ (рис. 3).

Сопоставим каждому t_j соответствующий треугольник t_j^K на K-плоскости и приложим их друг к другу так же, как смежны треугольники t_j. В результате получим «кривой» треугольник $A'B'C'$, стороны которого равны по длине сторонам ABC.

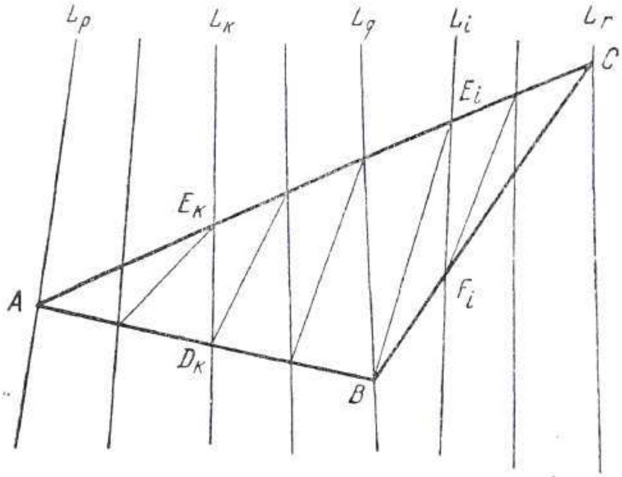

Рис. 3.

Это построение вполне аналогично построению, проведенному в доказательстве леммы 4. Повторяя данный там вывод, убедимся, что углы на сторонах нашего „кривого" треугольника $\geqslant \pi$ и значит $A'B'C'$ — вогнутый треугольник. Пусть α', β', γ' его углы при вершинах A' B', C'. По лемме 1, при распрямлении треугольника они не убывают. Но распрямленный треугольник будет треугольником T^K, соответствующим исходному треугольнику ABC на $\{L_i\}$. Поэтому, обозначая углы T^K через α^K, β^K, γ^K, имеем:

$$\alpha' \leqslant \alpha^K,\ \beta' \leqslant \beta^K,\ \gamma' \leqslant \gamma^K. \tag{4}$$

Пусть теперь α, β, γ — углы треугольника ABC. Угол α есть вместе с тем угол в треугольнике $t_1 = AD_{p+1}E_{p+1}$. По условию он не больше угла в треугольнике t_1^K. Но этот угол является вместе с тем углом α' в вогнутом треугольнике $A'B'C'$. Стало быть,

$$\alpha \leqslant \alpha'. \tag{5а}$$

Аналогично, угол γ является углом в последнем треугольнике t_j, прилегающем к стороне BC. Поэтому он также не меньше соответствующего угла в треугольнике t_j^K, а этот угол есть γ'. Следовательно,

$$\gamma \leqslant \gamma'. \tag{5б}$$

Наконец, рассмотрим угол β при вершине B. В этой вершине сходятся три треугольника t_j. Для их углов β_1, β_2, β_3, в силу общей теоремы сложения, имеем: $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \beta$ и, кроме того, $\beta_1 \leqslant \beta_1^K$, $\beta_2 \leqslant \beta_2^K$, $\beta_3 \leqslant \beta_3^K$, где β_1^K, β_2^K, β_3^K — углы в соответствующих треугольниках t_j^K. Эти три угла в сумме образуют угол β' нашего вогнутого треугольника. Поэтому оказывается

$$\beta < \beta'. \tag{5в}$$

Соединяя (4), (5а), (5б), (5в), получаем, $\alpha \leqslant \alpha^K$, $\beta \leqslant \beta^K$, $\gamma \leqslant \gamma^K$, что и требовалось доказать.

Мы предполагали, что стороны AB, AC нигде не встречаются на отрезках L_k между L_p и L_q и стороны BC, AC не встречаются на L_i между L_q и L_r. Допустим теперь, что это не так.

Пусть, например, стороны AB, AC встречаются в точке D на отрезке L_k. Тогда их части AD представляют две кратчайшие, соединяющие одни и те же точки A и D. По лемме 4, они должны встречаться также в некоторой точке E на отрезке L_{p+1}, соседнем с L_p. По лемме 3 угол между отрезками AE сторон AB, AC должен быть равен нулю, а он и есть угол α. Поскольку в рассматриваемом случае $\alpha = 0$, то заведомо $\alpha \leqslant \alpha^K$. Совершенно так же, если стороны BC, AC встречаются, то $\gamma = 0$ и, следовательно, $\gamma \leqslant \gamma^K$.

Пусть теперь $\overline{A}$ последняя точка, в которой встречаются стороны AB, AC, так что их части $\overline{A}B$, $\overline{A}C$ уже нигде не пересекаются на отрезках L_k. Аналогично, пусть $\overline{C}$ последняя точка встречи сторон CA, CB (не исключая $\overline{C} = C$).

Для треугольника $\overline{T} = \overline{A}B\overline{C}$ имеет место уже рассмотренный случай. Поэтому для его угла β, который совпадает с углом исходного треугольника, и угла $\overline{\beta}^K$ соответствующего треугольника $\overline{T}^K$ имеем:

$$\beta \leqslant \overline{\beta}^K; \tag{6а}$$

аналогично, если $\overline{C} = C$, имеем:

$$\gamma \leqslant \overline{\gamma}^K. \tag{6б}$$

Построим теперь на K-плоскости отрезки, равные по длине $A\overline{A}$ и $C\overline{C}$, и приложим их к вершинам $\overline{A}$, $\overline{C}$ треугольника $\overline{T}^K$ так, чтобы они образовывали с его сторонами углы $\leqslant \pi$. Получим вогнутый треугольник со сторонами, равными сторонам треугольника $T = ABC$. Распрямляя этот вогнутый треугольник, получим треугольник T^K. При этом углы увеличатся. Таким образом:

$$\overline{\gamma}^K < \gamma^K, \ \overline{\beta}^K < \beta^K.$$

Вместе с (6) это дает $\beta < \beta^K$, $\gamma < \gamma^K$, и теорема доказана.

7. Теперь мы формулируем и докажем утверждение, которое будет непосредственно использовано для доказательства теоремы 3 § 2.

Пусть M и N — две кратчайшие на $\{L_i\}$, исходящие из одной точки O, а X, Y — какие-либо их точки, лежащие на некоторых отрезках L_i, L_j. Обозначим через OX, OY, XY кратчайшие на $\{L_i\}$, соединяющие указанные точки, а также их длины. Построим на K-плоскости треугольник $O'X'Y'$ со сторонами, равными OX, OY, XY, и обозначим через $\gamma_{MN}^K(X, Y)$, — короче $\gamma(X, Y)$, — его угол при вершине O. Утверждение, о котором идет речь, состоит в следующем.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 угол $\gamma_{MN}^K(X, Y)$ оказывается неубывающей функцией расстояний OX, OY.* (Угол этот определен здесь лишь для точек X, Y, лежащих на отрезках L_i, так что переменные OX, OY пробегают, вообще говоря, дискретный ряд значений. Исключение представляет случай, когда, скажем, кратчайшая M идет по какому-либо отрезку L_i, и тогда точка X может перемещаться по ней непрерывно.)

Доказательство. Достаточно доказать, что при любых точках A, B на M, N и такой точке C на N, что $OC < OB$, будет

$$\gamma(A, B) \geqslant \gamma(A, C).$$

Рассмотрим сначала «общий случай», когда OB не идет ни по какому отрезку, так что точки O, C, B лежат на разных отрезках L_p, L_q, L_r. Так как C лежит между O и B, то, не ограничивая общности, можно считать $p < q < r$. В таком случае L_q необходимо пересекает OA, или AB в какой-то точке D и может быть совпадающей с A. Допустим, что L_q пересекает именно AB в точке, отличной от A.

Тогда мы имеем три треугольника: $T_1 = OAC$, $T_2 = ADC$, $T_3 = DBC$ с общей вершиной C. Так как OC и CB образуют кратчайшую, то сумма углов этих треугольников при общей вершине C будет $\geqslant \pi$. Аналогично сумма углов при D также $\geqslant \pi$.

Если построить на K-плоскости соответствующие треугольники T_1^K, T_2^K, T_3^K, то по теореме 5 их углы могут быть только больше, чем у T_1, T_2, T_3. Поэтому, прикладывая T_1^K, T_2^K, T_3^K друг к другу подобно тому, как прилегают T_1, T_2, T_3, получим вогнутый треугольник $O'A'B'$. Его угол при O' есть $\gamma(A, C)$. Распрямляя треугольник $O'A'B'$, получим треугольник, соответствующий OAB, при этом угол $\gamma(A, C)$ не уменьшится и вместе с тем станет равным $\gamma(A, B)$. Следовательно, $\gamma(A, C) \leqslant \gamma(A, B)$.

В случае, когда отрезок L_q, идущий через C, пересекает OA или проходит через A, рассуждаем аналогично.

Точно так же, если OC идет по отрезку L_q, то аналогичное рассуждение с треугольниками OAC, ABC приводит к тому же результату. Теорема 6 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3

1. Пусть F — линейчатая поверхность в метрическом пространстве, для которой выполнено условие теоремы 3 § 2, т. е. при некотором данном K углы любого опирающегося на F треугольника T не больше углов соответствующего треугольника T^K на K-плоскости. Теорема 3 утверждает, что *в таком случае то же верно для треугольников на* F.

Доказательство будет основано на своего рода приближении поверхности F сгущающимися совокупностями $\{L_i\}$ ее образующих. Именно, мы рассматриваем такие совокупности образующих $\{L_i\}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $(n + 1)$-ая совокупность получается из n-ой присоединением новых образующих и каждая образующая поверхности F есть предел образующих из совокупностей $\{L_i\}_n$. При этом, как мы докажем, метрика — расстояния на поверхности F — оказывается пределом метрик — расстояний на совокупностях $\{L_i\}$.

Треугольники T, опирающиеся на $\{L_i\}$ будут также опираться на F, и потому у них углы не больше, чем у треугольников T^K. Поэтому мы сможем воспользоваться результатами § 3.

Доказательство теоремы 3 получается на этом пути через ряд лемм. При этом мы все время будем рассматривать какую-либо данную линейчатую поверхность F, имеющую внутреннюю метрику и удовлетворяющую при данном K условию теоремы 3.

2. Лемма 1. Пусть A, B — точки на линейчатой поверхности F, лежащие на образующих L, M. Рассматриваем неограниченно сгущающиеся совокупности образующих $\{L_i\}_n$ и на них точки A_n, B_n, сходящиеся к A и B. На каждой совокупности образующих $\{L_i\}_n$ существует кратчайшая $\overline{A_nB_n}$. Утверждается:

1) *существует сходящаяся последовательность из кратчайших* $\overline{A_nB_n}$;

2) *предел сходящейся последовательности этих кратчайших есть кратчайшая AB на F;*

3) *длина AB равна пределу длин $\overline{A_nB_n}$*; это значит, что расстояние $\rho_F(AB)$ точек A, B на F равно пределу расстояний точек A_n, B_n на совокупностях $\{L_i\}_n$.

Доказательство. Так как кратчайшая A_nB_n на поверхности F пересекает все образующие между точками A_n, B_n, а кратчайшая $\overline{A_nB_n}$ на $\{L_i\}_n$ — только входящие в данную совокупность, то между длинами этих кратчайших имеется неравенство

$$s(\overline{A_nB_n}) \leqslant s(A_nB_n) = \rho_F(A_n, B_n). \tag{1}$$

А так как $A_n \to A$, $B_n \to B$, то $\rho_F(A_n, B_n) \to \rho_F(A, B)$, что вместе с (1) дает

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s(A_nB_n) \leqslant \rho_F(A, B). \tag{2}$$

Отсюда следует, кроме того, что длины кратчайших $\overline{A_nB_n}$ ограничены в совокупности.

Доказательство существования сходящейся последовательности из этих кратчайших можно провести поэтому обычным путем. Именно, выбираем последовательность кратчайших, у которых сходятся точки, лежащие на образующих первой совокупности $\{L_i\}_1$. Из этой последовательности выбираем последовательность кратчайших, у которых сходятся точки, лежащие на образующих второй совокупности, и т. д. Тогда диагональная последовательность будет сходящейся, и первое утверждение леммы окажется доказанным.

Если обозначить через AB предел какой-либо сходящейся последовательности кратчайших $\overline{A_{n_i}B_{n_i}}$, то, по известной теореме, для длины AB имеем неравенство

$$s(AB) \leqslant \underline{\lim_{i\to\infty}}\, s(\overline{A_{n_i}B_{n_i}}). \tag{3}$$

Вместе с тем, $s(AB)$ не меньше расстояния между точками A и B на F

$$s(AB) \geqslant \rho_F(A, B). \tag{4}$$

Сопоставляя теперь (2), (3), (4), убеждаемся, что $s(AB) = \rho_F(A, B)$. А это значит, что AB — кратчайшая на F.

Наконец, мы могли бы заранее выделить такую последовательность из кратчайших $\overline{A_nB_n}$, в которой длины сходятся к их нижнему пределу $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s(\overline{A_nB_n})$. Тогда при дальнейшем выборе отсюда сходящейся последовательности $\overline{A_{n_i}B_{n_i}}$ мы имели бы

$$\underline{\lim_{i\to\infty}}\, s(\overline{A_{n_i}B_{n_i}}) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s(\overline{A_nB_n}).$$

Поэтому вместо (3) можно было бы написать
$$s(AB) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} s(\overline{A_nB_n}). \qquad (5)$$
Сопоставляя теперь (2), (4), (5), убеждаемся, что $\lim s(\overline{A_nB_n})$ существует и что
$$s(AB) = \rho_F(A,\ B) = \lim_{n\to\infty} s(\overline{A_nB_n}), \qquad (6)$$
чем доказано и третье утверждение леммы.

3. Лемма 2. Пусть совокупности образующих $\{L_i\}_n$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ неограниченно сгущаются на поверхности F. Пусть M и N — исходящие из точки O кратчайшие на F, являющиеся пределами исходящих из $O_n \to O$ кратчайших M_n, N_n на $\{L_i\}_n$. *Тогда угол* $\gamma^K_{MN}(X,\ Y)$, *определенный для кратчайших* M, N, *подобно п. 7 § 3, оказывается неубывающей функцией расстояний* $\rho_F(O,\ X)$, $\rho_F(O,\ Y)$.

Доказательство. Фиксируем на M и N точки X и Y. Пусть X_n, Y_n — сходящиеся к ним точки на M_n, N_n, лежащие на отрезках, принадлежащих $\{L_i\}_n$.

По лемме 1 расстояния между точками O_n, X_n, Y_n, измеренные на $\{L_i\}_n$, сходятся к расстояниям между точками O, X, Y на F. Угол γ определяется этими расстояниями и зависит от них непрерывно. Поэтому
$$\gamma^K_{MN}(X,\ Y) = \lim_{n\to\infty} \gamma^K_{M_nN_n}(X_n,\ Y_n). \qquad (7)$$
Пусть теперь точки X', Y' на M, N лежат ближе к O, чем X и Y, пусть точки X_n', Y_n' на M_n, N_n, лежащие на отрезках $\{L_i\}_n$, сходятся к X', Y'. Тогда при больших n эти точки X_n', Y_n' так же лежат ближе к O_n, чем X_n, Y_n. Поэтому, по теореме 6 § 3
$$\gamma^K_{M_nN_n}(X_n',\ Y_n') \leqslant \gamma^K_{M_nN_n}(X_n,\ Y_n).$$
Применяя (7) к точкам X, Y и X', Y', получим отсюда, что
$$\gamma^K_{MN}(X',\ Y') \leqslant \gamma^K_{MN}(X,\ Y),$$
и лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть треугольник $T = ABC$ на F является пределом треугольников $A_nB_nC_n$ на сгущающихся совокупностях образующих $\{L_i\}_n$. *Тогда углы треугольника T не больше углов соответствующего треугольника T^K на K-плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим, например, угол α при вершине A. По определению [1]
$$\alpha = \varlimsup_{X,\ Y\to A} \gamma^K_{AB,\ AC}(X,\ Y).$$
Но по лемме 2 угол γ есть неубывающая функция AX, AY, а потому
$$\alpha \leqslant \gamma^K_{AB,\ AC}(Y,\ Y)$$
и, в частности,
$$\alpha \leqslant \gamma^K_{AB,\ AC}(B,\ C) = \alpha^K.$$

---

[1] В [1] угол, т. е. верхний угол определялся как верхний предел углов γ в эвклидовских треугольниках (т. е. при $K = 0$). Но это, очевидно, не имеет значения. Кстати сказать, из того что $\gamma(X,\ Y)$ есть неубывающая функция AX, AY следует, что существует $\lim\limits_{X,\ Y\to A} \gamma(X,\ Y)$, т. е. α есть не только верхний угол, но и угол „в обычном смысле".

4. Теперь докажем утверждение, которое и дает непосредственно теорему 3.

Теорема 7. *При условии теоремы 3 каковы бы ни были кратчайшие M и N на F, исходящие из одной точки O, угол $\gamma^K(X, Y)$ есть неубывающая функция расстояний $\rho_F(O, X)$ и $\rho_F(O, Y)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что при любой точке Y на N и любых точек X', X на M таких, что $OX' < OX$, будет

$$\gamma^K_{MN}(X', Y) \leqslant \gamma^K_{MN}(X, Y).$$

Фиксируем точки X, X', Y с указанными условиями.

По лемме 1 существуют кратчайшие $\overline{OX'}$, $\overline{X'X}$, $\overline{OY}$, $\overline{X'Y}$, $\overline{XY}$, являющиеся пределами кратчайших, соединяющих точки $O_n \to O$, $X_n' \to X'$, $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ на некоторых сгущающихся совокупностях образующих $\{L_i\}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Образованные этими кратчайшими треугольники $\overline{T}_1 = \overline{OX'Y}$, $\overline{T}_2 = \overline{X'XY}$ и $\overline{T} = \overline{OXY}$ являются пределами треугольников на $\{L_i\}_n$. Стороны этих треугольников равны сторонам треугольников T_1, T_2, T, ограниченных соответствующими отрезками M, N и кратчайшими $\overline{X'Y}$, $\overline{XY}$.

Построим на K-плоскости соответствующие треугольники T_1^K, T_2^K, T^K. Углы в треугольниках T_1^K, T^K при вершинах, отвечающих точке O, есть не что иное, как $\gamma^K_{M,N}(X', Y)$ и $\gamma^K_{M,N}(X, Y)$.

Прикладывая T_1^K, T_2^K друг к другу так же, как смежны $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$, получим фигуру $T_1^K + T_2^K$, которая оказывается вогнутым треугольником.

В самом деле, так как по длине $\overline{OX'} = OX$ и $\overline{X'X} = X_1X$, то $\overline{OX'} + \overline{X'X}$ представляет собою кратчайшую между O и X. Поэтому углы ξ_1, ξ_2 треугольников $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ при точке X_1 — смежные, и потому $\xi_1 + \xi_2 \geqslant \pi$.

Треугольники $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ являются пределами треугольников на $\{L_i\}_n$, и к ним приложима лемма 3. Поэтому для углов треугольников T_1^K, T_2^K и подавно

$$\xi_1^K + \xi_2^K \geqslant \pi.$$

А это и значит, что $T_1^K + T_2^K$ есть вогнутый треугольник.

Распрямляя его, получим треугольник T^K. При этом угол при вершине, соответствующей точке O, не уменьшается:

$$\gamma^K_{MN}(X', Y) \leqslant \gamma^K_{MN}(X, Y).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 7 немедленно следует **теорема 3**. Если $T = ABC$ треугольник на F, то его угол α есть по определению

$$\alpha = \overline{\lim_{X, Y \to A}} \gamma^K_{AB, AC}(X, Y),$$

а

$$\alpha^K = \gamma^K (B, C),$$

и так как γ^K есть неубывающая функция, то оказывается $\alpha \leqslant \alpha^K$. Вместе с теоремой 3, в силу выводов § 1, 2, доказаны также теоремы 1, 2 и 4.

§ 5. Замечания к определению кривизны

1. В данном в § 1 определении верхней кривизны $\overline{K}_R(A)$ метрического пространства R в точке A особую роль играют „вырожденные“ треугольники T, для которых $S(T^0)=0$, т. е. сумма двух сторон равна третьей (под R можно, конечно, подразумевать также поверхность F с ее внутренней метрикой). Фактически, однако, это не имеет значения, как выясняется из следующей теоремы.

Теорема 8. *Если в некоторой окрестности точки A все треугольники вырождаются, то такая окрестность сводится к отрезку. Если же это не имеет места ни для какой окрестности точки A, то $\overline{K}_R(A)$ не меняется от того, допускаем ли мы к рассмотрению вырожденные треугольники, или нет.*

Докажем первое утверждение. Пусть никакая окрестность точки A не сводится к отрезку. Возьмем вблизи A точку X и проведем отрезок AX. Так как окрестность A не сводится к AX, то можно взять точку B вне AX так, что $AB < AX$. Пусть, кроме того, C такая точка на AX, что $AC = AB$.

Рассмотрим треугольник ABC. Если он не вырожден, то наше утверждение доказано. Допустим поэтому, что он вырождается, т. е. что $AB + AC = BC$. (Другие возможности исключены, так как $AB = AC$.) В таком случае отрезки AB, AC образуют вместе один отрезок $AB + AC$ (рис. 4).

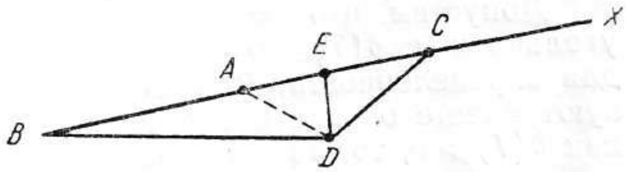

Рис. 4.

Так как никакая окрестность A не сводится к отрезку, то можно взять точку D вне отрезка $AB + AC$ и при том ближе к A, чем B и C.

Так как $BD + CD \geqslant BC = 2AB$, то хотя бы один из отрезков BD, CD не меньше AB. Пусть скажем $BD \geqslant AB$. Кроме того, $BD \leqslant AB + AD < AB + AC = BC$, поэтому на отрезке AC есть такая точка E, что $BE = BD$.

Треугольник BDE не вырожден. В самом деле, так как $BD = BE$, то вырождение его возможно лишь при $DE = BD + BE$, что невозможно, так как

$$BD + BE \geqslant 2AB > AD + AE \geqslant DE.$$

Таким образом, мы находим невырожденный треугольник, и первое утверждение теоремы доказано.

2. Докажем теперь, что если сколь угодно близко к A есть невырожденные треугольники, то $\overline{K}(A)$ не меняется от того, допускаем мы к рассмотрению также вырожденные треугольники, или нет.

В § 1 мы определили для треугольника T величину

$$K(T) = \begin{cases} \dfrac{\delta(T)}{S(T^0)} & \text{при } S(T^0) \neq 0 \\ +\infty & \text{при } S(T^0) = 0,\ \delta(T) > 0 \\ -\infty & \text{при } S(T^0) = 0,\ \delta(T) \leqslant 0. \end{cases}$$

(Кстати сказать, для вырожденного треугольника всегда $\delta(T) \geqslant 0$, и поэтому в последнем случае фактически возможно лишь $\delta(T) = 0$.)

Далее, величина $\overline{K}(A)$ была определена формулой

$$\overline{K}(A) = \overline{\lim_{T \to A}}\, K(T). \tag{1}$$

Если допускать только невырожденные треугольники T и обозначать соответствующий верхний предел через $\overline{K'}(A)$, то, очевидно:

$$\overline{K'}(A) \leqslant \overline{K}(A). \tag{2}$$

Доказываемое утверждение состоит в том, что

$$\overline{K'}(A) = \overline{K}(A). \tag{3}$$

Из неравенства (2) ясно, что при $\overline{K'}(A) = \infty$, это верно.

Допустим, что $\overline{K'}(A) < \infty$. Так как для вырожденных треугольников T, для которых $\delta(T) \leqslant 0$, по определению $K(T) = -\infty$, то привлечение таких треугольников не может увеличить $\overline{K'}(A)$. Поэтому остается рассмотреть лишь те вырожденные треугольники, для которых $\delta(T) > 0$.

Мы докажем, однако, что при $\overline{K'}(A) < \infty$ в некоторой окрестности точки A вообще не будет таких вырожденных треугольников. Тем самым и наше утверждение (3) будет доказано.

Допустим, что сколь угодно близко к A есть вырожденные треугольники с $\delta(T) > 0$. Пусть $T = BCD$ такой треугольник и пусть, для определенности, $BC = BD + DC$ (рис. 5). Тогда BD и DC образуют вместе один отрезок, так что угол между ними равен π. А так как $\delta(T) > 0$, то по крайней мере один из углов β, γ при вершинах B и $C > 0$. Пусть именно угол при B будет $\beta > 0$. Тогда стороны BC и BD не налегают полностью друг на друга вблизи B, так что на них найдутся несовпадающие точки X, Y такие, что $BX = BY$ и, стало быть, также $CX = CY$.

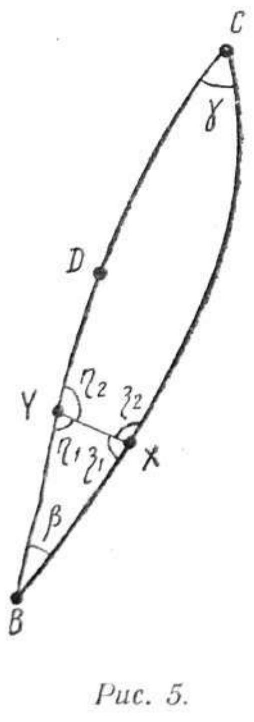

Рис. 5.

Проведем кратчайшую XY. Мы получаем треугольники $T_1 = BXY$ и $T_2 = CXY$. Пусть ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 их углы при вершинах X и Y. Так как ξ_1, ξ_2 и η_1, η_2 смежные, то $\xi_1 + \xi_2 \geqslant \pi$, $\eta_1 + \eta_2 \geqslant \pi$. Поэтому

$$\delta(T_1) + \delta(T_2) = (\xi_1 + \eta_1 + \beta - \pi) + \\ + (\xi_2 + \eta_2 + \gamma - \pi) \geqslant \beta + \gamma.$$

При X, $Y \to B$, $XY \to 0$ и, очевидно, $S(T_1^0)$, $S(T_2^0) \to 0$. Поэтому хотя бы одно из отношений

$$\frac{\delta(T_1)}{S(T_1^0)}, \quad \frac{\delta(T_2)}{S(T_2^0)}$$

принимает сколь угодно большие значения.

Если при этом треугольники T_1, T_2 не вырождаются, то лемма доказана. Но T_2 не может вырождаться, когда XY мало, потому что $CX = CY$.

Допустим, что T_1 вырождается. Так как $BX = BY$, это возможно лишь при условии, что $BX + BY = XY$. Но тогда $BX + BY$ представляет собою отрезок между X и Y, так что его можно принять за XY. В таком случае углы ξ_2, η_2, между XY и CX, CY, будут оба равны π, и мы будем иметь $\delta(T_2) \geqslant \pi$. А в таком случае, при X, $Y \to B$ будет

$$\frac{\delta(T_2)}{S(T_2^0)} \to \infty,$$

т. е. опять оказывается, что $\overline{K'}(A) = \infty$, вопреки предположению.

Следовательно, при $\overline{K''}(A) < \infty$ в некоторой окрестности точки A вообще нет вырожденных треугольников с положительными избытками, что и требовалось доказать.

3. В данном в § 1 определении величины $\overline{K}_R(A, F)$ можно видеть два недостатка: первый, что оно относится лишь к линейчатым поверхностям F, и второй, что в нем используются кроме треугольников, вершины которых лежат на F, еще треугольники, отсекаемые от опирающихся на F. Поэтому встает вопрос о таком определении, при котором теорема 1 была бы верна, но которое годилось бы для любых поверхностей и использовало только треугольники с вершинами на поверхности. На этот вопрос мы не имеем удовлетворительного ответа.

Конечно, можно было бы определить $\overline{K}_R(A, F)$ для любой поверхности F той же формулой (1), допуская как любые треугольники с вершинами на F, так и отсекаемые от них. Теорема 1 будет тогда верна. Но такое определение в случае гладкой поверхности F в римановом пространстве R не дает кривизны этого пространства вдоль двумерного элемента, касающегося F в точке A, потому что треугольники с вершинами на F, вообще говоря, не сходятся по направлению к этому двумерному элементу. Такую сходимость можно, например, обеспечить требованием, чтобы треугольники были „существенно невырожденными", т. е. чтобы отношение каждой стороны к сумме двух других было „существенно меньше единицы", т. е. $< 1 - \varepsilon$. В соответствии с этим можно определить для любой поверхности

$$\overline{K}_R(A, F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{T \to A}} K(T), \tag{4}$$

где берутся треугольники T, для которых отношение каждой стороны к сумме двух других меньше $1 - \varepsilon$.

Исходя из такого определения, можно было бы доказать теорему 1 при некоторых ограничениях на линейчатую поверхность F.

В локально компактном пространстве, где каждая точка имеет окрестность, в которой любой отрезок продолжаем до границы окрестности,[1] можно определить „касательный конус Q поверхности F в точке A". Он образуется пределами „секущих" XY, т. е. продолженных до границ указанной окрестности отрезков, проходящих через точки X, $Y \in F$, при условии, что X, $Y \to A$.

Естественно говорить, что треугольники T_n сходятся по направлению к конусу Q, если не только они сходятся к точке A, а их стороны к конусу Q, но если у них можно выбрать вершины A_n так, что продолженные отрезки A_nX_n, пересекающие стороны B_nC_n, также сходятся к Q (т. е. предел любой их сходящейся последовательности принадлежит Q). Если поверхность F — линейчатая, то ясно,

[1] Этим свойством обладают локально компактные пространства с кривизной $< K$, не говоря, конечно, о римановых и вообще финслеровых пространствах.

что опирающиеся на нее треугольники сходятся, в этом смысле, по направлению к ее касательному конусу в точке A.

Таким образом, в локально компактном пространстве с продолжаемыми отрезками можно определить $\overline{K}_R(A, F)$ формулой (1) для любой поверхности, и если допускать здесь не только треугольники T, сходящиеся по направлению к конусу Q, касающемуся F в точке A, но и отсекаемые от них треугольники, то при таком определении теорема 1, как ясно из сказанного, будет иметь место.

Можно ли ограничиться рассмотрением треугольников с вершинами на F, — в общем случае, нам неизвестно. Конечно, можно изменить определение $\overline{K}_R(A, F)$ так, чтобы треугольники, отсекаемые от тех, которые опираются на F, в этом определении уже не фигурировали. Например, определим для треугольника T величину $\overline{K}(T)$, как точную нижнюю границу тех K, для которых соответствующий треугольник T^K на K-плоскости имеет не меньшие углы, причем $\overline{K} = +\infty$, если таких K нет вовсе, и $\overline{K} = -\infty$, если это верно при всех K. Определим затем

$$\overline{\overline{K}}_R(A, F) = \overline{\lim_{T \to A}} \overline{K}(T),$$

где берутся только треугольники T, опирающиеся на F. Легко видеть, что для так определенной величины $\overline{\overline{K}}_R(A, F)$ теорема 1 верна. Вообще, пользуясь общей оценкой разности углов треугольника T и T^K через верхнюю границу ν^K относительных избытков треугольников, отсекаемых от T легко доказать, что

$$\overline{\overline{K}}_R(A, F) \geqslant \overline{K}_R(A, F).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. А. Д. Александров. Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения. Труды Матем. инст. им. Стеклова, 1951, т. 38, 7—23.
3. А. Д. Александров. Изопериметрические неравенства на кривых поверхностях. ДАН СССР, 1945, т. 47, № 4. 239—242.
4. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия. ОНТИ, М.—Л., 1935.
5. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИ, М.—Л., 1936.
6. W. Fenchel. Diss. Math. Ann. т. 101 (1929), 238—252.

Статья поступила в редакцию 25 VII 1956 г.