Über eine Verallgemeinerung der RIEMANNschen Geometrie[1])

Von A. D. ALEXANDROW, Leningrad

Inhaltsübersicht

§ 1. Einleitung

1. Die vorliegende Arbeit begründet eine Geometrie solcher Räume, die man wohl Räume mit einer Krümmung nennen kann, die höchstens gleich einem gewissen vorgegebenen K ist. Kurz gesagt, *der Raum mit der Krümmung höchstens K* ist ein metrischer Raum, in dem, jedenfalls lokal, d. h. in der Umgebung jedes Punktes, zwei Forderungen erfüllt sind:

a) Zwei beliebige Punkte sind durch eine Strecke oder, wie wir sagen werden, durch eine Kürzeste verbindbar, d. h. durch eine Linie von der Länge des Abstandes zwischen ihren Endpunkten;

b) die Summe der in entsprechender Weise definierten Winkel zwischen den Seiten jedes beliebigen Dreiecks ist höchstens gleich der Winkelsumme eines Dreiecks mit Seiten derselben Länge auf einer Fläche konstanter Krümmung K. Ist speziell $K = 0$, so handelt es sich um Räume nichtpositiver Krümmung.

Jeder RIEMANNsche Raum erweist sich, soweit die Krümmung in ihm durch eine gewisse Zahl K beschränkt ist, als ein Raum mit der Krümmung höchstens K. Ein Raum von der Krümmung höchstens K braucht jedoch nicht nur kein RIEMANNscher zu sein, sondern braucht nicht einmal eine Mannigfaltigkeit zu sein. So stellt z. B. eine Figur, die aus zwei ebenen (euklidischen), in einer gemeinsamen Spitze zusammenstoßenden Dreiecken gebildet wird, einen zweidimensionalen Raum nichtpositiver Krümmung dar (wenn die Abstände auf dem kürzesten Wege in dieser Figur selbst bestimmt werden).

Nichtsdestoweniger haben alle solche Räume viele gemeinsame Eigenschaften, und ihre Geometrie stellt ein recht umfangreiches Feld für die Forschung dar. In diesem Artikel beabsichtige ich, die Elemente dieser Geometrie darzulegen; ferner werden wir einige Resultate erhalten, die die von uns eingeführten allgemeinen Begriffe illustrieren; wir werden diese Resultate mit geometrischen Methoden erhalten, die in gewissem Sinne den Methoden der elementaren

[1]) Dieser Artikel enthält den vom Verfasser im März 1955 in der Humboldt-Universität Berlin gehaltenen Vortrag in einer ausführlichen und noch erweiterten Gestalt. Ein Teil der Ergebnisse wurde in einem Artikel des Verfassers in den „Arbeiten des Steklow-Instituts“ 1951, 38, S. 5—23 veröffentlicht; ein großer Teil erscheint zum ersten Mal. Im Forschungsinstitut für Mathematik in Berlin wurde der Artikel aus dem Russischen übersetzt.

Geometrie verwandt sind. Nebenbei bemerkt ist eine Reihe dieser Resultate, soweit mir bekannt, auch im Rahmen der RIEMANNschen Geometrie neu. Eine ausführlichere Darstellung der Theorie würde über die Grenze des für einen Artikel zulässigen Umfangs hinausführen. Die vorliegende Theorie stellt eine Anwendung derselben Ideen dar, die der inneren Geometrie der Flächen zugrunde liegen, so wie sie in meinen Arbeiten [1, 2] entwickelt ist [2]). In den nachfolgenden Punkten dieses Paragraphen werden genauere Definitionen der Ausgangsbegriffe gegeben, die Grundresultate formuliert und wird der Zusammenhang der gegebenen Theorie mit einigen anderen Arbeiten [2, 7] präzisiert.

2. Die Kürzeste und das Dreieck. Alle unsere Definitionen beziehen sich auf metrische Räume. Gemäß der üblichen Bezeichnungsweise bedeutet $\varrho(X, Y)$ den Abstand zwischen den Punkten X, Y in einem gegebenen Raum. Der Kürze wegen werden wir häufig den Abstand einfach durch das Symbol XY bezeichnen.

Bekanntlich läßt sich in einem metrischen Raum R die Länge einer Kurve vollkommen analog der üblichen Definition der Länge erklären. Ist nämlich die Kurve L durch die stetige Funktion X_t $(X \in R, t \in [0, 1])$ vorgegeben, so ist ihre Länge

$$\varrho(L) = \sup \sum_{k=0}^{n-1} \varrho\left(X_{t_k}, X_{t_{k+1}}\right),$$

wo

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1 .$$

Die *Kürzeste* ist eine Kurve, deren Länge gleich dem Abstand zwischen ihren Endpunkten ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Kürzeste als stetiges Bild der Strecke $[0, 1]$ der Zahlenachse folgende Eigenschaft hat: Wenn X_t ein Punkt der Kürzesten ist, so gilt für alle geordneten Tripel $t_1 < t_2 < t_3$ $(t_i \in [0, 1])$

$$\varrho(X_{t_1}, X_{t_2}) + \varrho(X_{t_2}, X_{t_3}) = \varrho(X_{t_1}, X_{t_3}) .$$

Offensichtlich ist jeder Abschnitt einer Kürzesten ebenfalls eine Kürzeste. Eine Kürzeste, die die Punkte A und B verbindet, d. h. eine solche, für die $X_0 = A$, $X_1 = B$ ist, bezeichnen wir mit AB.

Ein *Dreieck* ABC nennt man die Gesamtheit der drei Kürzesten AB, BC, CA, die die drei verschiedenen Punkte A, B, C paarweise verbinden. Diese Punkte heißen Ecken, die Kürzesten AB, BC, CA Seiten des Dreiecks. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich die Seiten überschneiden oder teilweise zusammenfallen, speziell ist möglich, daß sich zwei Seiten vollständig der dritten überlagern: $AB + BC = AC$, so daß das Dreieck vollständig ausartet.

Eine grundlegende Rolle spielt im weiteren folgende Konstruktion: Einem gegebenen Dreieck $T = ABC$ wird das Dreieck T^K gegenübergestellt mit den Seiten von derselben Länge auf einer Fläche konstanter Krümmung K oder, wie wir sagen wollen, auf der K-Ebene. Unter einer *K-Ebene* versteht man für $K = 0$ die euklidische Ebene, für $K < 0$ die LOBATSCHEWSKIsche Ebene, für $K > 0$ eine offene Halbsphäre. Das Dreieck T^K auf der K-Ebene mit Seiten von derselben Länge wie das gegebene Dreieck T in R nennen wir das Dreieck, das diesem T auf der K-Ebene *entspricht*.

[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die am Schluß des Artikels angegebene Literatur.

Ist $K \leq 0$, so existiert das Dreieck T^K zu jedem Dreieck T (wobei natürlich die Entartung von T^K zu einer Strecke zugelassen ist). Ist dagegen $K > 0$, so existiert das Dreieck T^K nur unter der Bedingung, daß die Summe der Seiten der Ungleichung

$$AB + BC + CA < \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$$

genügt. Ohne es noch besonders zu erwähnen, setzen wir stets voraus, daß diese Bedingung für $K > 0$ erfüllt ist. Für ein gegebenes $K > 0$ genügt es hierzu, sich auf die Untersuchung von Dreiecken zu beschränken, die in einem seinem Durchmesser nach hinreichend kleinen Teil des Raumes R enthalten sind.

3. Der Winkel. (Alle in diesem Punkte gegebenen Definitionen sind in [1] enthalten.) Es seien L, M zwei Kurven, die von einem Punkte O ausgehen[3]). X, Y seien zwei Punkte auf L und M, die von O verschieden sind. Wir konstruieren auf der K-Ebene das Dreieck T^K mit den Seiten, die den Abständen OX, OY, XY gleich sind (Abb. 1). Den Winkel dieses Dreiecks bei der Ecke O', der dem

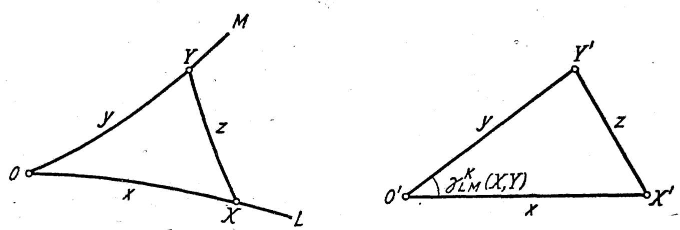

Abb. 1

Punkte O entspricht, bezeichnen wir mit $\gamma_{LM}^K(X, Y)$ oder einfach $\gamma(X, Y)$. Sind speziell die Kurven L und M Kürzeste, so wird die Lage der Punkte X, Y auf ihnen durch die Abstände $x = OX$, $y = OY$ bestimmt, und wir schreiben daher auch $\gamma_{LM}^K(x, y)$. Im weiteren bezeichnet überall $\gamma_{LM}^K(X, Y)$ oder $\gamma_{LM}^K(x, y)$ oder einfach $\gamma(x, y)$ den so definierten Winkel.

Den *oberen Winkel* zwischen den Kurven L, M nennen wir den oberen Grenzwert des Winkels $\gamma\ (X; Y)$ für $X, Y \to O$:

$$\alpha_{LM} = \overline{\lim_{X, Y \to O}}\ \gamma(X, Y)\,.$$

Für die gegebene Definition ist es klar, daß der obere Winkel stets existiert, da $0 \leq \gamma \leq \pi$. Insofern als die Winkel bei unendlich kleinen Dreiecken auf der K-Ebene sich unendlich wenig von den Winkeln der entsprechenden Dreiecke auf der euklidischen Ebene unterscheiden, hängt der obere Grenzwert der Winkel γ^K für $X, Y \to O$, das heißt α_{LM}, von K gar nicht ab und bezieht sich demnach auf die Kürzesten L, M selbst.

Existiert jedoch der Grenzwert $\alpha = \lim_{X, Y \to O} \gamma(X, Y)$, so sagen wir, daß zwischen den Kurven L, M ein *Winkel* existiert und daß er gleich α ist.

[3]) Die Kurve L geht vom Punkte O aus, wenn sie eine solche Parameterdarstellung X_t ($t \in [0, 1]$) zuläßt, daß $X_0 = O$ ist.

Der Winkel (obere Winkel) bei der Ecke A des Dreiecks ABC wird der Winkel (obere Winkel) zwischen seinen Seiten AB, AC genannt.

Ferner führen wir den Begriff des *relativen Exzesses* $\delta_K(T)$ *eines Dreiecks* T bezüglich der Krümmung K ein. Darunter versteht man die Differenz der Summe der oberen Winkel des Dreiecks T und der Summe der Winkel des entsprechenden Dreiecks T^K.

4. Ein Raum mit der Krümmung $\leq K$ wird dadurch charakterisiert, daß für jedes „hinreichend kleine" Dreieck T der Exzeß $\delta_K(T) \leq 0$ ist. Genauer gesagt: *wir bezeichnen mit* R_K *ein Gebiet des metrischen Raumes, das folgende Eigenschaften besitzt*:

a) *zwei beliebige Punkte aus* R_K *sind durch eine Kürzeste (die nicht unbedingt in* R_K *enthalten ist) verbindbar*;

b) *der relative Exzeß* $\delta_K(T)$ *eines beliebigen Dreiecks mit den Ecken in* R_K *ist nichtpositiv*;

c) wenn $K > 0$, so ist die Seitensumme eines beliebigen Dreiecks mit den Ecken in R_K kleiner als $\dfrac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

In Punkt 3 wurde darauf hingewiesen, daß dies für die Existenz des entsprechenden Dreiecks auf der K-Ebene notwendig ist. Man kann natürlich einfach fordern, daß der Durchmesser von R_K hinreichend klein ist.

Unter einem Raum von der Krümmung $\leq K$ versteht man einen metrischen Raum, in dem jeder Punkt ein Gebiet R_K als Umgebung besitzt[4]). Alle unsere Schlußfolgerungen werden sich nur auf Gebiete R_K beziehen, so daß wir die globalen Eigenschaften der Räume von der Krümmung $\leq K$ nicht untersuchen werden.

Es sei bemerkt, daß der Raum sich als ein solcher von konstanter Krümmung erweist, wenn die relativen Exzesse aller Dreiecke nicht nur nichtpositiv, sondern gleich Null sind. Genauer gesagt — wie das am Schluß des § 3 bewiesen werden soll —: wenn das Gebiet R_K homöomorph einem Gebiet des n-dimensionalen euklidischen Raumes und für jedes Dreieck in R_K der relative Exzeß $\delta_K(T) = 0$ ist, so erweist sich R_K als isometrisch zu einem Gebiet im n-dimensionalen Raum konstanter Krümmung K.

Der Definition eines Raumes mit der Krümmung $\leq K$ kann man noch eine andere Form verleihen, die in gewissem Sinne sich dem gewöhnlichen Begriff der Krümmung enger anschließt. Man kann nämlich einen Raum der Krümmung $\leq K$ durch die Bedingungen definieren:

a) jeder Punkt hat eine Umgebung, in der zwei beliebige Punkte durch eine Kürzeste verbindbar sind;

[4]) Es sei bemerkt, daß die angegebene Definition, wie man leicht sieht, gleichbedeutend der folgenden ist: Ein Raum von der Krümmung $\leq K$ ist ein metrischer Raum, in dem jeder Punkt eine solche Umgebung U besitzt, daß (1) zwei beliebige ihrer Punkte durch eine Kürzeste (nicht unbedingt in U selbst) verbindbar sind und (2) für jedes Dreieck T, das in U enthalten ist, $\delta_K(T) \leq 0$ gilt. (Übrigens werden wir beweisen, daß in R_K jeder beliebige Punkt eine konvexe Umgebung hat, eine solche also, in der zwei beliebige Punkte durch eine in dieser Umgebung liegende Kürzeste verbunden werden können. Daher können sich alle Schlußfolgerungen auf solche Umgebungen beziehen.)

b) für jede Folge von Dreiecken T, die gegen einen Punkt konvergieren, ist

$$\overline{\lim}\ \frac{\delta_0(T)}{S(T^0)} \leq K\,, \tag{1}$$

wo $\delta_0(T)$ der „absolute" Exzeß des Dreiecks T ist, d. h. sein Exzeß in bezug auf die Krümmung Null: $\delta_0(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ und $S(T^0)$ der Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks auf der Ebene ist.

Die Äquivalenz dieser Definition mit der vorhergehenden soll am Schluß des § 3 bewiesen werden.

Es wäre zu bemerken, daß in der Formel (1) $S(T^0) = 0$ zugelassen wird; dann ist gemeint, daß für solche Dreiecke T (zumindest für eines mit hinreichend großer Nummer in der Folge) $\delta_0(T) \leq 0$ [5]) ist. Der Fall $S(T^0) = 0$ darf allein schon deshalb nicht ausgenommen werden, als dann die gegebene Definition für einen Raum mit der Krümmung $\leq K$ streng genommen mit der vorhergehenden nicht äquivalent sein würde. Ein triviales Beispiel eines Raumes nichtpositiver Krümmung stellt die Gerade dar: in ihr arten alle Dreiecke aus und haben die Exzesse Null, so daß hier stets $S(T^0) = \delta_0(T) = 0$.

Wenn auch formal der eindimensionale und sogar der nulldimensionale Raum ein Raum von der Krümmung $\leq K$ sein kann, so besteht für solche Räume doch kein reales Interesse.

5. Grundlegende Eigenschaften von R_K. Der fundamentale Satz über Räume mit der Krümmung $\leq K$, den wir im § 3 beweisen werden und der ihre Eigenschaften außerordentlich klärt, behauptet:

In einem R_K ist der Winkel $\gamma^K_{LM}(x, y)$ für zwei beliebige, von einem Punkt ausgehende Kürzesten L und M eine nicht abnehmende Funktion von x und y.

Aus der Monotonie von $\gamma(x, y)$ folgt, daß $\lim\limits_{x,\, y \to 0} \gamma(x, y)$ existiert, d. h. wir haben den Satz:

In einem R_K existiert zwischen zwei beliebigen von einem Punkte ausgehenden Kürzesten ein bestimmter Winkel.

Ferner erweist sich, daß in einem R_K nicht nur, wie das die Definition behauptet, die Winkelsumme des Dreiecks T höchstens gleich der des entsprechenden Dreiecks T^K auf der K-Ebene ist, sondern auch *jeder Winkel des Dreiecks T höchstens gleich dem entsprechenden Winkel des Dreiecks T^K ist.*

In der Tat, da $\gamma(x, y)$ mit zunehmenden x und y nicht abnimmt, so haben wir für beliebige x und y $\gamma(x, y) \geq \lim\limits_{x,\, y \to 0} \gamma(x, y)$; das heißt, wenn α_{LM} der Winkel zwischen den Kürzesten L und M ist, so gilt

$$\alpha_{LM} \leq \gamma^K_{LM}(x, y)\,. \tag{2}$$

T sei ein Dreieck in R_K und α sein Winkel bei der Ecke A und α^K der Winkel im entsprechenden Dreieck T^K. Offensichtlich ist α^K nichts anderes als der Winkel

[5]) Die Gleichung $S(T^0) = 0$ bedeutet, daß beim Dreieck T die Summe zweier Seiten gleich der dritten ist, z. B. $AB + BC = AC$. Aber in diesem Falle bilden die Seiten AB und BC gemeinsam eine Kürzeste, und daher ist der Winkel zwischen ihnen gleich π, so daß mit Bestimmtheit $\delta_0(T) \geq 0$ ist. Demnach läuft die zusätzliche Bedingung zur Formel (1) faktisch darauf hinaus, daß für $S(T^0) = 0$ $\delta_0(T) = 0$ sein muß.

$\gamma^K_{LM}(a, b)$, wo L, M die Seiten des Dreiecks T, die in der Ecke A zusammenlaufen, und a und b ihre Längen sind. Daher bedeutet die Ungleichung (2), daß $\alpha \leq \alpha^K$. Das heißt aber, daß in R_K jeder Winkel des Dreiecks T höchstens gleich dem entsprechenden Winkel des Dreiecks T^K ist.

Die Behauptung des obigen Satzes, daß der Winkel $\gamma(x, y)$ eine nichtabnehmende Funktion ist, bedeutet anschaulich gesagt, daß die von einem Punkt ausgehenden Kürzesten im R_K jedenfalls nicht langsamer divergieren als auf der K-Ebene. Das kann man z. B. folgendermaßen erklären:

Seien A, B Punkte auf den Kürzesten L und M, die vom Punkt O ausgehen (Abb. 2). Dem Dreieck $T = OAB$ entspricht das Dreieck $T^K = O'A'B'$, und sein

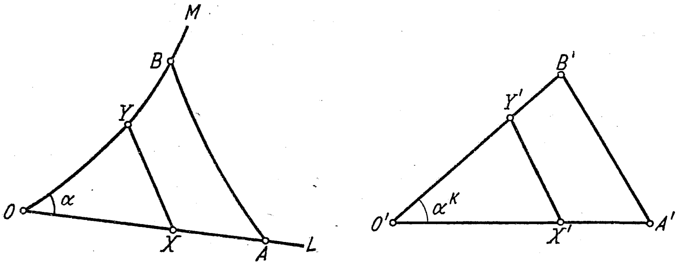

Abb. 2

Winkel an der Spitze O' ist $\gamma^K_{LM}(a, b)$, wo $a = OA$, $b = OB$. Sind nun X, Y Punkte auf OA und OB und X', Y' die ihnen entsprechenden Punkte auf $O'A'$ und $O'B'$, d. h. solche, daß

$$x = OX = O'X', \quad y = OY = O'Y',$$

so ist

$$XY \leq X'Y'.$$

In der Tat, $\gamma(x, y)$ ist der Winkel im Dreieck auf der K-Ebene mit den Seiten $x, y, z = XY$ und $\gamma(a, b)$ der Winkel im Dreieck mit den Seiten $x, y, z' = X'Y'$, und da $\gamma(x, y) \leq \gamma(a, b)$, so ist $XY \leq X'Y'$.

Nimmt man speziell die Punkte X, Y in der Mitte der Seiten OA, OB, so erhalten wir das folgende Resultat:

Die Mittellinie eines Dreiecks $T = OAB$ in einem R_K ist höchstens gleich der Mittellinie des entsprechenden Dreiecks T^K.

Daraus, daß die von einem Punkt ausgehenden Kürzesten in einem R_K nicht langsamer divergieren als die entsprechenden Kürzesten auf der K-Ebene, folgt, daß *in einem R_K die Kürzeste, die zwei gegebene Punkte verbindet, eindeutig ist.* Denn die von einem Punkt ausgehenden Kürzesten können bei ihrem Divergieren sich schon nicht mehr begegnen, da sie nicht langsamer als auf der K-Ebene divergieren.

Die von einem Punkt O ausgehenden Kürzesten können jedoch auf einem gewissen Stück OA zusammenfallen und divergieren erst hinter dem Punkte A. Das liegt vor auf Polyedern in jeder Ecke A, um die der volle Winkel höchstens 2π ist. Hinter einer solchen Ecke A setzt sich eine durch sie verlaufende Kürzeste nicht eindeutig fort.

Neben diesen grundlegenden Eigenschaften eines R_K werden wir in den §§ 3—6 auch eine Reihe anderer erhalten. So werden wir in § 5 den Begriff des Inhalts einer Fläche einführen und insbesondere den folgenden Satz beweisen:

In einem R_K läßt sich mit einer beliebigen geschlossenen Kurve von der Länge l eine Fläche aufspannen, deren Inhalt höchstens gleich dem des Kreises auf der K-Ebene mit demselben Umfang l ist. (Ist dabei $K > 0$, so wird vorausgesetzt, daß $l\sqrt{K} < 2\pi$, da der genannte Kreis andernfalls einfach nicht existiert.)

Dieser Satz verallgemeinert die bekannte Maximaleigenschaft des Kreises sowie den Satz von KARLEMAN darüber, daß im euklidischen Raum der Flächeninhalt einer auf eine gegebene Kontur aufgespannten Minimalfläche höchstens gleich dem Flächeninhalt des Kreises von gleichem Umfang ist [6].

6. Als Grundlage für den Beweis des Satzes über die Monotonie des Winkels $\gamma(x, y)$ und demnach als Grundlage für den Aufbau der gesamten Theorie über Räume mit der Krümmung $\leq K$ dient der folgende allgemeine Satz über die oberen Winkel eines Dreiecks:

ABC sei ein Dreieck in einem beliebigen metrischen Raum mit der einzigen Bedingung, daß zwei beliebige Punkte auf den Seiten dieses Dreiecks durch eine Kürzeste verbindbar sind. Es sei α der obere Winkel dieses Dreiecks bei der Ecke A und α_K der ihm entsprechende Winkel im entsprechenden Dreieck auf der K-Ebene.

(Hier ist K beliebig, mit der einzigen Bedingung, daß $AB + BC + CA < \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$, wenn $K > 0$.) Sei schließlich ν der obere Grenzwert der relativen Exzesse der Dreiecke AXY, deren Seiten AX, AY Abschnitte der Seiten AB, AC sind.

Es wird behauptet, daß die Ungleichung gilt

$$\alpha - \alpha_K \leq \nu .$$

Da nach der Definition des Gebietes R_K in ihm für jedes beliebige Dreieck $\nu \leq 0$, so folgt aus dem genannten allgemeinen Satz, daß in R_K stets $\alpha \leq \alpha_K$, d. h. jeder obere Winkel eines beliebigen Dreiecks T ist höchstens gleich dem entsprechenden Winkel des Dreiecks T^K. Das bildet gerade den Ausgangspunkt der Untersuchung der Eigenschaften der Gebiete R_K.

7. Beispiele für Räume mit der Krümmung $\leq K$.

a) Wenn in einem *Gebiet R* eines RIEMANNschen Raumes die Krümmung nach oben durch die Zahl K beschränkt ist, so ist R ein Raum mit der Krümmung $\leq K$.

b) Jede abgeschlossene konvexe Menge M im RIEMANNschen Raum ist ein Gebiet R_K, wenn in ihm die Krümmung nach oben beschränkt ist und K der obere Grenzwert der Krümmung in M ist. (Eine konvexe Menge ist eine solche, in der zwei beliebige Punkte durch eine Geodätische verbindbar sind.) Speziell ist eine abgeschlossene konvexe Menge M im euklidischen Raum ein Gebiet R_0. Es können jedoch nicht nur die konvexen Mengen Gebiete R_K sein. So ist z. B. die abgeschlossene Menge des euklidischen Raumes, die aus zwei in einem gewissen Grenzpunkt zusammenstoßenden konvexen Körpern besteht, ein Gebiet R_0, wenn die Abstände auf dem kürzesten Wege in M gemessen werden. Von Interesse ist die Frage: welche Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß die Menge M im Raum konstanter Krümmung K ein Gebiet R_K ist, wenn der Abstand XY als der untere Grenzwert der X und Y in M verbindenden Kurven definiert ist.

c) Eine Polyederfläche, die aus Dreiecken der K-Ebene zusammengesetzt ist, ist ein Raum mit der Krümmung $\leq K$, wenn die Summe der Winkel um jede nicht auf dem Rande liegende Ecke $\geq 2\pi$ ist. Analoges gilt für Polyeder, die aus n-dimensionalen Simplices des n-dimensionalen Raumes konstanter Krümmung K so zusammengesetzt sind, daß die Summe der Zweiflachwinkel um jede innere $(n-2)$-dimensionale Seitenfläche $\geq 2\pi$ ist (unter einigen zusätzlichen Bedingungen, die wir hier nicht präzisieren).

d) In gewissem Sinne kann man behaupten, daß der Raum, dessen Metrik die Grenze der Metriken von Räumen mit der Krümmung $\leq K$ ist, selbst ein Raum mit der Krümmung $\leq K$ ist, so daß speziell die Grenze der RIEMANNschen Metriken mit der Krümmung $\leq K$ eine Metrik mit der Krümmung $\leq K$ ist.

Ohne uns um die Klärung zu bemühen, unter welchen Bedingungen diese Behauptung in allgemeinster Form gültig ist, wollen wir auf den einfachsten und gleichzeitig den wichtigsten Spezialfall hinweisen. Mögen in der Kugel S im n-dimensionalen euklidischen Raum stetige Funktionen $\varrho_m(X, Y)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ eines Punktpaares X, Y vorgegeben sein, die den für die Metrik üblichen Bedingungen genügen. Möge die Kugel S in jeder der Metriken ϱ_m eine Kugel auch im Sinne dieser Metrik ϱ_m und dabei ein *Gebiet* R_K mit demselben Wert K für alle m sein. Mögen ferner die Funktionen $\varrho_m(X, Y)$ gegen die Funktion $\varrho(X, Y)$ gleichmäßig konvergieren, die nur dann gleich Null ist, wenn $X = Y$; demzufolge ist $\varrho(X, Y)$ ebenfalls eine Metrik. Dann ist die Kugel S eine Kugel auch im Sinne der Metrik ϱ und auch wieder ein Gebiet R_K mit demselben K.

Der Beweis dieser Behauptung beruht auf folgender Bemerkung: Wenn die Kürzesten L_m, M_m, die bzgl. der Metriken ϱ_m vom Punkte 0 ausgehen, gegen die Linien L und M konvergieren, so erweisen sich diese als Kürzeste in der Grenzmetrik ϱ. Gleichzeitig konvergieren die Winkel $\gamma_m^K(x, y)$, die für die Kürzeste L_m und M_m gemäß Punkt 3. definiert sind, gegen den Winkel $\gamma^K(x, y)$, der für die Kürzesten L und M in der Grenzmetrik definiert ist. Sind daher $\gamma_m^K(x, y)$ nichtabnehmende Funktionen von x und y, so gilt dasselbe auch für $\gamma^K(x, y)$. Diese Eigenschaft des Winkels $\gamma^K(x, y)$ wird eben dadurch zumindest für diejenigen Kürzesten L und M festgestellt, die sich als Grenzen der Kürzesten bzgl. der Metriken ϱ_m ergeben. Es läßt sich jedoch zeigen, daß hieraus nunmehr folgt, daß das auch für *beliebige* Kürzeste gilt, von denen nicht im voraus angenommen wird, daß sie die Grenzen der Kürzesten bzgl. der Metriken ϱ_m sind. Aus den Schlußfolgerungen des Punktes 5. ist aber evident, daß diese Eigenschaft einen Raum mit der Krümmung $\leq K$ bestimmt, so daß sich die Grenzmetrik ϱ ebenfalls als eine Metrik mit der Krümmung $\leq K$ erweist.

Demnach kann man sagen, daß die Grenze der RIEMANNschen Metriken mit der Krümmung $\leq K$ eine Metrik mit der Krümmung $\leq K$ ist. Es entsteht die fundamentale Frage: ist das Umgekehrte ebenfalls gültig, d. h., wird (unter entsprechenden Bedingungen) die allgemeine Metrik mit der Krümmung $\leq K$, die etwa in einem Gebiet des n-dimensionalen euklidischen Raumes vorgegeben ist, die Grenze der Metriken mit der Krümmung $\leq K$ sein, die im selben Gebiet G vorgegeben sind? Im Fall der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist die Antwort positiv und liegt im wesentlichen in den in [2] ausgesprochenen Sätzen vor.

8. Die Zusammenhänge mit einigen anderen Arbeiten. In meinen Untersuchungen über die innere Geometrie der Flächen gehe ich vom Begriff eines Raumes mit innerer Metrik, und zwar von einem solchen metrischen Raum aus, in dem der Abstand $\varrho(x, y)$ jedes beliebigen Punktpaares gleich dem unteren Grenzwert der Längen der diese Punkte verbindenden Kurven ist, wobei alle Längen in derselben Metrik ϱ gemessen werden. Unter der Bedingung, daß ein solcher Raum in der Umgebung jedes Punktes lokal kompakt ist, sind zwei beliebige Punkte durch eine Kürzeste verbindbar. Existieren andererseits Kürzeste, so erweist sich dadurch die Metrik als eine innere, da nach der Definition der Kürzesten ihre Länge gleich dem Abstand zwischen den Endpunkten ist. Demnach — jedenfalls für die lokal kompakten Räume und „im Kleinen“, d. h. in einer gewissen Umgebung jedes beliebigen Punktes — ist die in der Definition des Gebietes R_K aufgestellte Forderung nach der Existenz von Kürzesten gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Metrik eine innere sei.

Die im Punkt 1 angegebene grundlegende Eigenschaft von R_K, daß für zwei beliebige, von einem Punkt ausgehende Kürzeste der Winkel $\gamma^K_{LM}(x, y)$ eine nichtabnehmende Funktion von x und y ist, wurde von mir in [1] für konvexe Flächen mit der „spezifischen Krümmung“ $\leq K$ festgestellt und dort die „K-Konkavität“ genannt, — im Gegensatz zur „K-Konvexität“, die die Metrik der konvexen Flächen im dreidimensionalen Raume konstanter Krümmung K charakterisiert und darin besteht, daß der Winkel $\gamma(x, y)$ im Gegenteil eine nichtzunehmende Funktion von x und y ist.

Bereits früher habe ich die innere Metrik der konvexen Flächen durch die Eigenschaft charakterisiert, daß die Mittellinie eines Dreiecks auf der Fläche nicht kürzer als die Mittellinie des entsprechenden Dreiecks auf der K-Ebene sein soll [3] (unter der zusätzlichen Bedingung, daß in jedem Punkte ein Berührungskegel existiert). Dem steht natürlicherweise die Bedingung gegenüber, durch welche für Räume mit nichtpositiver Krümmung oder mit der Krümmung $\leq K$ die Metrik so erklärt werden kann: die Mittellinie des Dreiecks ist höchstens gleich der Mittellinie des Dreiecks auf der K-Ebene.

H. Busemann hat in einer umfangreichen Arbeit [7] die Räume mit nichtpositiver Krümmung durch die Bedingung definiert, daß bei jedem kleinen Dreieck die Mittellinie höchstens gleich der Hälfte seiner entsprechenden Seite ist. Auf dieser Grundlage (gemeinsam mit einigen anderen recht allgemeinen Bedingungen: (1) der Kompaktheit der beschränkten Mengen, (2) der Existenz und (3) der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Kürzesten) hat er die Theorie solcher Räume entwickelt und gezeigt, daß sie in vielem analoge Eigenschaften wie die Riemannschen Räume mit nichtpositiver Krümmung haben.

Die BUSEMANNschen Räume umfassen jedoch auch eine weite Klasse von FINSLERschen Räumen. Ein Raum mit der Krümmung Null ist nach BUSEMANN ein Raum mit beliebiger MINKOWSKIscher Metrik, d. h. ein affiner Raum, in dem als Sphäre jedes beliebige zentralsymmetrische beschränkte, abgeschlossene Gebiet angenommen wird. In einer solchen Metrik ist die Mittellinie des Dreiecks stets gleich der Hälfte der entsprechenden Seite. Gleichzeitig ist in einer solchen Metrik die Summe der oberen Winkel eines Dreiecks in der Regel größer als π.

Demnach haben wir zwei Möglichkeiten für die Definition der Räume mit nichtpositiver Krümmung oder allgemein der Räume mit der Krümmung $\leq K$:

a) die Mittellinie jedes Dreiecks ist höchstens gleich der Mittellinie des entsprechenden Dreiecks auf der K-Ebene;

b) der „bzgl. K relative" Exzeß jedes Dreiecks ist nichtpositiv.

Wie in Punkt 5 angegeben, folgt 1. aus 2., das Umgekehrte gilt jedoch nicht, wie schon das Beispiel der MINKOWSKIschen Metrik zeigt.

Demnach ist es klar, daß die Resultate BUSEMANNS auf Räume mit nichtpositiver Krümmung in unserem Sinne anwendbar sind (jedenfalls unter der Voraussetzung (1) der Kompaktheit der beschränkten Mengen und (2) der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Kürzesten); viele von seinen Schlüssen lassen sich mutatis mutandis auf Räume mit der Krümmung $\leq K$ unter jener Bedingung verallgemeinern, die sich auf die Mittellinie des Dreiecks bezieht.

Unsere vorliegende Arbeit überschneidet sich jedoch ihren Resultaten nach wenig mit der Arbeit BUSEMANNS, da wir unser Hauptaugenmerk auf die vor allem mit dem Begriff des Winkels zusammenhängenden lokalen Eigenschaften und einige andere gerichtet haben, die gerade für die verallgemeinerten RIEMANNschen und nicht überhaupt für FINSLERsche Räume charakteristisch sind. Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß für unsere Schlüsse die Forderung der eindeutigen Fortsetzbarkeit der Kürzesten nirgends gestellt wird. Die Kürzeste kann viele Fortsetzungen zulassen, wie auf einem Polyeder mit einer Ecke, um die der volle Winkel $\geq 2\pi$ ist.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß der im Punkt 6 formulierte allgemeine Satz über die oberen Winkel des Dreiecks die Grundlage für die Untersuchung der zweidimensionalen metrischen Mannigfaltigkeiten bildet, die ich Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Krümmung nenne [2]. Es erweist sich jedoch, daß man diesen Mannigfaltigkeiten eine allgemeinere Definition als die in [2] angegebene verleihen kann. Die Mannigfaltigkeit R mit beschränkter Krümmung läßt sich nämlich durch folgende Bedingungen definieren:

a) R ist eine zweidimensionale metrische Mannigfaltigkeit mit innerer Metrik;

b) in der Umgebung jedes Punktes sind die Summen der Exzesse einer beliebigen endlichen Gesamtheit von Dreiecken, die sich paarweise nicht überlagern, nach oben beschränkt:

$$\sum \delta(T_i) < N .$$

N ist lediglich von der Umgebung abhängig. Der Exzeß wird als $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ definiert, wo α, β, γ die oberen Winkel des Dreiecks sind. An Stelle dieser Exzesse können die relativen Exzesse $\delta_K(T_i)$ für jedes beliebige feste K genommen werden.

Im Vergleich zu der in [2] angegebenen Definition besteht die Verallgemeinerung darin, daß dort die Beschränktheit der Summen der Beträge der Exzesse $|\delta(T_i)|$ gefordert wird. Es erweist sich jedoch, daß aus der Beschränktheit der Exzeßsummen nach oben bereits auch die Beschränktheit nach unten folgt. Den Beweis hierfür hat W. Salgaller erbracht.

Diese Bemerkung zeigt, daß im zweidimensionalen Fall die Theorie der Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Krümmung die Theorie der Mannigfaltigkeiten mit der Krümmung $\leq K$ als Spezialfall umfaßt.

§ 2. Allgemeine Sätze über die oberen Winkel

1. Zuerst wollen wir einige allgemeine Sätze über den oberen Winkel (so wie er im § 1, Punkt 3 definiert ist) in einem beliebigen metrischen Raum zusammenstellen.

Satz 1. *Sind $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$ die oberen Winkel zwischen den Kurven L_1, L_2, L_3, die von einem Punkt ausgehen, so ist*

$$\alpha_{12}+\alpha_{23} \geq \alpha_{13}\,.$$

Dieser allgemeine Satz wurde in [1] bewiesen.

Sind L_1 und L_3 die Äste einer Kürzesten, so ist offenbar $\alpha_{13}=\pi$. Daher folgt aus Satz 1

Satz 2. *Die Summe der oberen Nebenwinkel ist mindestens π.*

2. Satz 3. *Bei zwei beliebigen von einem Punkt O ausgehenden Kürzesten L, M gilt für den oberen Winkel α zwischen ihnen:*

$$\alpha=\sup \lim_{x\to 0} \gamma_{LM}^K(x, y)\,, \tag{1}$$

wo γ_{LM}^K der im § 1, Punkt 3 (Abb. 1) definierte Winkel ist.

Gemäß Definition ist $\alpha=\sup \lim\limits_{x, y\to 0} \gamma^K(x, y)$; in der Gleichung (1) wird die obere Grenze der Grenzwerte bereits unter der Bedingung $x\to 0$ angenommen, während y sich in willkürlicher Weise ändern kann, d. h. der Punkt X auf L strebt gegen O, wogegen Y auf M sich willkürlich ändert. Natürlich kann man hier x und y die Rollen vertauschen lassen.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem folgenden Lemma:

Lemma. *Für jedes K gilt*

$$\cos\gamma^K=\frac{y-z}{x}+\varepsilon\,, \tag{2}$$

wo $\varepsilon\to 0$ für $\frac{x}{y}\to 0$ und die x, y, z, γ^K denselben Sinn haben wie in Satz 3: $OX=x$, $OY=y$, $XY=z$, wo X, Y auf L, M liegen. (Wegen $Y\in M$ ist y beschränkt, und daher folgt aus $\frac{x}{y}\to 0$, daß $x\to 0$).

Es sei zum Beispiel $K < 0$; wir setzen $K = -k^2$. Dann gilt nach der bekannten Formel der LOBATSCHEWSKIschen Geometrie für ein Dreieck T^K mit den Seiten x, y, z

$$\operatorname{ch} kz = \operatorname{ch} kx \operatorname{ch} ky - \operatorname{sh} kx \operatorname{sh} ky \cos \gamma^K,$$

wo ch, sh hyperbolischer Kosinus und Sinus sind.

Hieraus erhalten wir, indem wir der Kürze wegen kx, ky, kz mit x, y, z bezeichnen,

$$\cos \gamma^K = \frac{\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} + \frac{\operatorname{ch} y (\operatorname{ch} x - 1)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}. \tag{3}$$

Wegen

$$\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z = 2 \operatorname{sh} \frac{y-z}{2} \operatorname{sh} \frac{y+z}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}, \quad \operatorname{sh} x = 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}$$

erhalten wir an Stelle (3)

$$\cos \gamma^K = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{y-z}{2}}{\operatorname{sh} x} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{y+z}{2}}{\operatorname{sh} y} + \frac{\operatorname{ch} y \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} \frac{x}{2}}. \tag{4}$$

Für x und $\frac{x}{y} \to 0$ strebt der zweite Summand auf der rechten Seite gegen Null. Außerdem ist nach der Dreiecksungleichung $|y - z| \leq x$ und daher $\dfrac{\operatorname{sh} \frac{y+z}{2}}{\operatorname{sh} y} \to 1$ für $\frac{x}{y} \to 0$; $2 \operatorname{sh} \frac{y-z}{2}$ und $\operatorname{sh} x$ sind äquivalent mit $y - z$ und x. Demnach folgt aus (4)

$$\cos \gamma^K = \frac{y-z}{x} + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon \to 0$ für x und $\frac{x}{y} \to 0$.

Jetzt beweisen wir Satz 3, d. h. wir beweisen, daß der obere Winkel

$$\alpha = \sup \lim_{x \to 0} \gamma^K(x, y).$$

Da definitionsgemäß $\alpha = \sup \lim\limits_{x, y \to 0} \gamma^K(x, y)$, genügt es zu beweisen, daß

$$\alpha \geq \sup \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \geq a > 0}} \gamma^K(x, y), \tag{5}$$

wo der Grenzwert unter der Bedingung genommen wird, daß $x \to 0$, wenn y größer als irgendeine positive Zahl bleibt.

Möge also der Punkt X auf der Kürzesten L gegen O streben und der Punkt Y auf der Kürzesten M in einer endlichen Entfernung von O bleiben. Auf M nehmen wir einen gegen O strebenden variablen Punkt Y' an, jedoch so, daß

$$\frac{x}{y'} \to 0,$$

wo $y' = OY'$. Es sei $XY' = z'$. Dann gilt auf Grund der Dreiecksungleichung

(Abb. 3)

$$YY' \geq XY - XY', \quad \text{D. h.} \quad y - y' \geq z - z',$$

oder

$$y - z \geq y' - z'.$$

Daraus ergibt sich auf Grund des bewiesenen Lemma (Formel (2))

$$\cos \gamma^K(x, y) + \varepsilon \geq \cos \gamma^K(x, y') + \varepsilon',$$

oder

$$\gamma^K(x, y) \leq \gamma^K(x, y') + \varepsilon''; \tag{6}$$

da aber $x, y' \to 0$, so ist nach der Definition des oberen Winkels

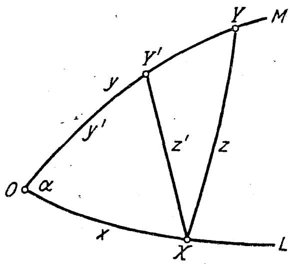

Abb. 3

$$\alpha \geq \gamma^K(x, y') - \varepsilon''',$$

(wo $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''' \to 0$ für $x, y' \to 0$).

Daher folgt aus (6):

$$\alpha \geq \sup \lim_{x \to 0} \gamma^K(x, y),$$

w. z. b. w.

3. Satz 4. *Unter den Bedingungen und mit der Bezeichnungsweise des Satzes 3 gilt die Ungleichung*

$$\cos \alpha \leq \lim_{x/y \to 0} \frac{y - z}{x}. \tag{7}$$

Beweis. Nach Satz 3 ist $\alpha \geq \sup \lim\limits_{x/y \to 0} \gamma^K(x, y)$ und folglich

$$\cos \alpha \leq \lim_{x/y \to 0} \cos \gamma^K(x, y);$$

nun ist nach Formel (2)

$$\cos \gamma^K(x, y) = \frac{y - z}{x} + \varepsilon,$$

woraus also (7) folgt.

Folgerung. L sei eine gegebene Kürzeste, X ihr variabler Punkt, x die Länge der Strecke auf der Kürzesten vom Anfang O bis zum Punkte X (Abb. 4). Es sei $z(x)$ die Länge der Kürzesten, die von einem festen Punkt A bis zum Punkt X gezogen ist. Es sei schließlich ξ der obere Winkel zwischen der Strecke OX der Kürzesten L und der Kürzesten AX (einer beliebigen von diesen Kürzesten, wenn mehrere von ihnen vorhanden sind). *Dann gilt für die untere linke Ableitung von z nach x die Ungleichung*

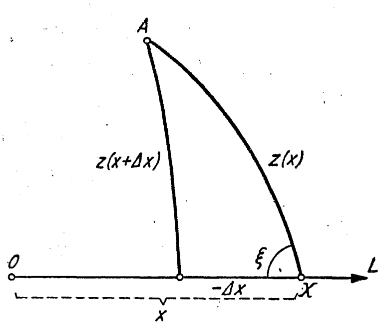

Abb. 4

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\text{u. l.}} \geq \cos \xi. \tag{8}$$

Zum Beweis genügt es, in der Gleichung (7) ξ für α, $z(x)$ und $z(x+\Delta x)$ für y und z, und $-\Delta x$ für x zu setzen.

Bemerkung. Die Funktion $z(x)$ genügt der Bedingung

$$|z(x+\Delta x)-z(x)|\leq|\Delta x|,$$

die sich in evidenter Weise aus der Dreiecksungleichung ergibt. Daher hat diese Funktion auf Grund des bekannten Satzes fast überall eine Ableitung. Im euklidischen und überhaupt im Riemannschen Raum existiert $\frac{dz}{dx}$ bekanntlich stets und ist gleich $\cos\xi$.

4. Jetzt wenden wir uns dem im § 1, Punkt 6 formulierten Satz über die oberen Winkel des Dreiecks zu.

Wir betrachten das Dreieck ABC in irgendeinem metrischen Raum unter der einzigen Bedingung, daß sich zwei beliebige Punkte auf den Seiten des Dreiecks durch eine Kürzeste verbinden lassen. Sei α der obere Winkel zwischen seinen Seiten AB, AC. Die Aufgabe besteht darin, daß der Unterschied dieses Winkels vom entsprechenden Winkel α_K im Dreieck $A'B'C'$ durch die Seiten gleicher Länge auf der K-Ebene abzuschätzen ist.

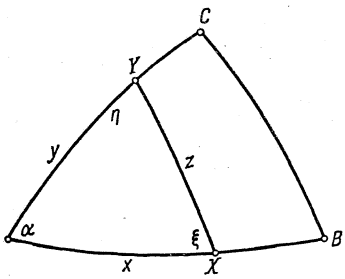

Abb. 5

Aus Existenzgründen nehmen wir $K<0$ an [6]).

Auf den Seiten AB, AC des Dreiecks ABC wählen wir Punkte X, Y aus und betrachten das Dreieck AXY, dessen Seiten AX und AY Abschnitte der Seiten AB, AC sind (Abb. 5). Wir setzen $AX=x$, $AY=y$, $XY=z$; es seien ξ und η die oberen Winkel zwischen AX, XY und AY, XY. Auf der K-Ebene konstruieren wir das entsprechende Dreieck A', X', Y' (d. h. das Dreieck mit den Seiten, deren Längen gleich x, y, z sind); es seien γ_K, ξ_K, η_K seine Winkel, die α, ξ, η entsprechen. Der Winkel γ_k ist eine Funktion von $x=AX$ und $y=AY$.

5. Unsere nächste Aufgabe besteht darin, folgende Abschätzung für die linken unteren Ableitungen zu geben:

Lemma 1. *Ist im Dreieck OXY keine Seite gleich der Summe der beiden anderen, so daß ξ_K, η_K weder Null noch π sind, so gilt*

$$\frac{\partial\gamma_K}{\partial x}\geq\frac{\cos\xi-\cos\xi_K}{\sin\xi_K}\cdot\frac{k}{\operatorname{sh}kx},\tag{9}$$

wo $\frac{\partial\gamma_K}{\partial x}$ ebenso wie im folgenden die linke untere Ableitung bezeichnet, und $k^2=-K$. Eine analoge Ungleichung gilt natürlich für $\frac{\partial\gamma_K}{\partial y}$. Ist $K=0$, so wird $\frac{k}{\operatorname{sh}kx}$ durch $\frac{1}{x}$ ersetzt, ist dagegen $K>0$, durch $\frac{k}{\sin kx}$, wo $k=\sqrt{K}$. Die entsprechende

[6]) Ist $K\geq 0$, so ist die Schlußfolgerung dieselbe. Nur muß man für $K>0$ voraussetzen, daß der Umfang des Dreiecks ABC kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ ist; wenn diese Einschränkung erfüllt ist, existieren alle im weiteren betrachteten Dreiecke auf der K-Ebene.

Schlußfolgerung ergibt sich wörtlich ebenso wie die im weiteren folgende Herleitung der Formel (9).

Beweis. Nach der bekannten Formel der LOBATSCHEWSKIschen Geometrie ist

$$\operatorname{ch} kz + \operatorname{ch} kx \operatorname{ch} ky - sh\, kx \operatorname{sh} ky \cos \gamma_K ,$$

oder, indem vorläufig kx, ky, kz, γ_K durch x, y, z, γ ersetzt werden,

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \cos \gamma . \tag{10}$$

Für die linken unteren Ableitungen erhalten wir wie für die gewöhnlichen

$$\operatorname{sh} z \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \cos \gamma + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \sin \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} \tag{11}$$

(dort wo $\operatorname{sh} z$ und $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \sin\gamma$ nichtnegative und stetige Funktionen sind).

Wir formen die beiden ersten Summanden der rechten Seite der Gleichung (11) um, indem wir $\operatorname{sh} x \cos \gamma$ mit Hilfe der Formel (10) ausdrücken. Dann bekommen wir

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \cos \gamma = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} x} . \tag{a}$$

Nach einer zu (10) analogen Formel ist

$$\frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{sh} z \cos \xi_K . \tag{b}$$

Den letzten Summanden in der Gleichung (11) transformieren wir nach dem Sinussatz

$$\operatorname{sh} y \sin \gamma = \operatorname{sh} z \sin \xi_K . \tag{c}$$

Unter Verwendung von (a), (b), (c) erhalten wir aus (3) nach Kürzung durch shz

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \xi_K + \operatorname{sh} x \sin \xi_K \frac{\partial \gamma}{\partial x} ,$$

oder, wenn wir von x, z und γ wieder zu kx, kz, γ_K zurückkehren,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \xi_K + \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \sin \xi_K \frac{\partial \gamma_K}{\partial x} . \tag{12}$$

Nach der Folgerung des Satzes 4 (Formel (8)) ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} \geq \cos \xi .$$

Daher folgt aus (12) (9):

$$\frac{\partial \gamma_K}{\partial x} \geq \frac{\cos \xi - \cos \xi_K}{\sin \xi_K} \cdot \frac{k}{\operatorname{sh} kx} ,$$

w. z. b. w.

6. Jetzt beweisen wir ein Lemma, mit dessen Hilfe sich der im § 1, Punkt 6 formulierte allgemeine Satz über die Winkel des Dreiecks leicht beweisen lassen wird.

Lemma 2. *Ist im Dreieck AXY keine Seite gleich der Summe der beiden anderen und $\xi_K - \xi \geq \varepsilon > 0$, so gibt es ein solches $x' < x$, daß*

$$\gamma(x, y) - \gamma(x' y) > a \ln \frac{x}{x'} ,$$

wo $a > 0$ nur von ε, K und dem Durchmesser des Dreicks ABC abhängig ist.

Zum Beweis transformieren wir zuerst die erhaltene Abschätzung (9) für $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$. Unter der Bedingung $\xi_K - \xi \geq \varepsilon > 0$ haben wir nämlich

$$\frac{\cos \xi - \cos \xi_K}{\sin \xi_K} \geq \frac{\cos (\xi_K - \varepsilon) - \cos \xi_K}{\sin \xi_K} = \sin \varepsilon - (1 - \cos \varepsilon) \operatorname{ctg} \xi_K .$$

Wegen $\xi_K \geq \varepsilon$ gilt $-\operatorname{ctg} \xi_K \geq -\operatorname{ctg} \varepsilon$, und daher

$$\frac{\cos \xi - \cos \xi_K}{\sin \xi_K} \geq \sin \varepsilon - (1 - \cos \varepsilon) \operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{1 - \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon} = \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} .$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung erhalten wir aus (9)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} \geq \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{k}{\operatorname{sh} k x} . \tag{13}$$

Die Funktion $\frac{k x}{\operatorname{sh} k x}$ ist in dem abgeschlossenen Intervall $[0, d]$, wo d den Durchmesser des Dreiecks ABC bezeichnet, stetig und positiv; deshalb ist sie nach unten durch eine positive Zahl beschränkt, so daß

$$\frac{k x}{\operatorname{sh} k x} \geq b > 0 , \qquad \frac{k}{\operatorname{sh} k x} \geq \frac{b}{x} .$$

(Insofern als $\frac{k x}{\operatorname{sh} k x}$ mit wachsendem x abnimmt, genügt es, $b = \frac{k d}{\operatorname{sh} k d}$ anzunehmen).

Somit können wir an Stelle (13) schreiben[7]):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} \geq 2 a \frac{1}{x} = 2 a \frac{d \ln x}{d x} ,$$

wo

$$2 a = b \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} .$$

Da hier $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ die linke untere Ableitung ist, läßt sich offenbar ein solches $x' < x$ angeben, daß

$$\gamma(x, y) - \gamma(x', y) < a(\ln x - \ln x') = a \ln \frac{x}{x'} ,$$

w. z. b. w.

7. Jetzt beweisen wir den allgemeinsten Satz über die oberen Winkel des Dreiecks.

Satz 5. *Ist α der obere Winkel zwischen den Seiten AB, AC des Dreiecks ABC und α_K der entsprechende Winkel in einem Dreieck mit gleichlangen Seiten auf der K-Ebene, so gilt*

$$\alpha - \alpha_K \leq \nu , \tag{14}$$

wobei ν eine obere Schranke der relativen Exzesse der Dreiecke AXY ist, d. h. der Größen

$$(\alpha + \xi + \eta) - (\gamma + \xi_K + \eta_K) ,$$

wobei die $\xi, \eta, \gamma, \xi_K, \eta_K$ denselben Sinn wie oben haben.

Beweis. Nach der Definition der Größe ν ist

$$(\alpha - \gamma) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \leq \nu .$$

---

[7]) Im Fall $K > 0$ haben wir: $\frac{\partial \gamma}{\partial x} \geq \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{k}{\sin k x} \geq \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{x}$.

Das Dreieck ABC ist selbst das Dreieck AXY, wenn X, Y mit B, C zusammenfallen. Dann ist $\gamma = \alpha_K$ und daher

$$(\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \leq \nu\,. \tag{15}$$

Außerdem können wir $AB = x_0$, $AC = y_0$ setzen.

Für das Dreieck ABC gibt es zwei Möglichkeiten: die Summe von zwei beliebigen Seiten desselben ist stets gleich der dritten, oder sie ist es nicht.

Wir wollen zeigen, daß im ersten Falle die Abschätzung (14) mit Bestimmtheit zutrifft. Z. B. sei $x_0 + y_0 = z_0$, d. h. $AB + AC = BC$, so daß AB und AC eine Kürzeste bilden. Dann ist $\alpha = \pi$, und das entsprechende Dreieck auf der K-Ebene artet in eine Strecke aus, so daß $\alpha_K = \pi$, $\xi_K = \eta_K = 0$. Da aber $\xi, \eta \geq 0$, so gilt nach der Ungleichung (15)

$$\nu \geq (\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \geq 0 = \alpha - \alpha_K\,.$$

Eine vollkommen analoge Schlußweise gilt, wenn $x_0 + z_0 = y_0$, d. h. $AB + BC = AC$ (oder $y_0 + z_0 = x_0$). Dann ist $\xi = \xi_K = \pi$, $\eta_K = 0$ und $\eta \geq 0$, so daß

$$\nu \geq (\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \geq \alpha - \alpha_K\,.$$

8. Demnach verbleibt die Untersuchung des allgemeineren Falles, wenn im Dreieck ABC keine der Seitenlängen gleich der Summe der beiden anderen ist.

Wir nehmen an, daß dann die behauptete Abschätzung nicht zutrifft, so daß $\alpha - \alpha_K > \nu$ oder, was damit gleichbedeutend ist,

$$\alpha - \alpha_K \geq \nu + 2\,\varepsilon, \tag{16}$$

wo ε beispielsweise gleich $\frac{1}{2}(\alpha - \alpha_K - \nu)$ ist. Dann erhalten wir aus der Ungleichung (15)

$$(\xi_K - \xi) + (\eta_K - \eta) \geq (\alpha - \alpha_K) - \nu \geq 2\,\varepsilon\,,$$

demnach ist wenigstens eine der Differenzen $\xi_K - \xi$, $\eta_K - \eta$ mindestens ε. Es sei nun

$$\xi_K - \xi \geq \varepsilon\,.$$

Dann läßt sich gemäß dem bewiesenen Lemma auf der Seite AB ein solcher Punkt X' ($AX' = x' < x_0$) angeben, daß

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x', y_0) > \alpha \ln \frac{x_0}{x'}\,.$$

Ist dagegen $\eta_K - \eta \geq \varepsilon$, so gilt

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x_0, y') > \alpha \ln \frac{y_0}{y'}\,.$$

Durch Vereinigung beider Fälle kann man sagen, daß es solche $x' \leq x_0$, $y' \leq y_0$ gibt, daß

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x', y') > \alpha \ln \frac{x_0\, y_0}{x'\, y'}\,. \tag{17}$$

Jetzt betrachten wir das Dreieck $AX'C$, oder auch ABY' und allgemein $AX'Y'$; für dieses spielt der Winkel $\gamma(x', y')$ die Rolle des Winkels $\alpha_K = \gamma(x_0, y_0)$. Nach

(17) ist $\gamma(x', y') < \gamma(x_0, y_0)$. Daher ist wegen (16)

$$\alpha - \gamma(x', y') \geq \alpha - \alpha_K \geq \nu + 2\,\varepsilon\,. \tag{18}$$

Diese Ungleichung spielt für das Dreieck $AX'Y'$ dieselbe Rolle wie die Ungleichung (16) für das Dreieck ABC, und folglich wiederholt sich für das Dreieck $AX'Y'$ dieselbe Situation wie für das Dreieck ABC. In der Tat kann die Größe ν für das „kleinere" Dreieck $AX'Y'$ nur kleiner als für das „größere" ABC sein; und daher kann ν in der Gleichung (18) auf das Dreieck $AX'Y'$ bezogen werden. Dann bedeutet die Ungleichung (17), daß die geforderte Abschätzung für den Winkel α für das Dreieck $AX'Y'$ nicht gilt. Daher kann in diesem Dreieck die Summe zweier Seiten nicht gleich der dritten sein, da die Abschätzung für diesen Fall mit Bestimmtheit nicht zutrifft. Schließlich sehen wir, daß die Ungleichung (18) für das Dreieck $AX'Y'$ wörtlich denselben Sinn hat wie die Ungleichung (16) für das Dreieck ABC.

Angesichts dessen können wir unsere Ableitung wiederholen und finden dann solche $x'' \leq x'$, $y'' \leq y'$, daß

$$\gamma(x', y') - \gamma(x'', y'') > a \ln \frac{x'\,y'}{x''\,y''}\,.$$

Wenn wir das mit der Ungleichung (17) in Verbindung bringen, erhalten wir

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x'', y'') > a \ln \frac{x_0\,y_0}{x''\,y''}\,.$$

Jetzt ist offenbar, daß sich dieselbe Diskussion für das Dreieck $AX''Y''$ usw. wiederholt.

Wir betrachten alle solche x, y, für die

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x, y) \geq a \ln \frac{x_0\,y_0}{x\,y}\,. \tag{19}$$

Da hier erst recht $\alpha_K = \gamma\,(x_0, y_0) \geq a \ln \frac{x_0\,y_0}{x\,y}$, ist das Produkt von solchen x, y, für die (19) gilt, nach unten durch eine positive Zahl beschränkt: $xy > c > 0$, dabei ist $c = x_0\,y_0\,e^{-\frac{\alpha_K}{a}}$.

Sei p die untere Grenze der Produkte derjenigen x, y, für die (19) gilt, so daß $p \geq c > 0$. Dann gibt es solche x_n, y_n $(n = 1, 2, \ldots)$, daß 1. für sie (19) gilt, 2. $x_n\,y_n \to p$, 3. x_n, y_n gegen gewisse Grenzwerte $\overline{x}$, $\overline{y}$ konvergieren. Wegen der Stetigkeit des Logarithmus und des Winkels γ als Funktionen von x, y ist dann die Ungleichung (19) auch für $\overline{x}$, $\overline{y}$ gültig. Das bedeutet, daß sich für das entsprechende Dreieck $A\overline{X}\,\overline{Y}$ dasselbe wie für das Dreieck ABC ergibt. Daher lassen sich solche $x' \leq \overline{x}$, $y' \leq \overline{y}$ — wobei einmal das Zeichen $<$ richtig ist — finden, daß für sie ebenfalls (19) gültig ist. Gleichzeitig hat man: $x'\,y' < \overline{x}\,\overline{y} = p$, d.h. p ist im Gegensatz zu seiner Definition nicht die untere Schranke der Produkte derjenigen x, y, für die (19) gilt.

Der sich ergebende Widerspruch zeigt, daß unsere ursprüngliche Annahme, die geforderte Abschätzung für die Differenz $\alpha - \alpha_K$ wäre ungültig, nicht möglich ist. Demnach wird sie erfüllt, w. z. b. w.

§ 3. Grundlegende Eigenschaften eines R_K

1. Wir erinnern an die im § 1, Punkt 4 stehende Definition eines Gebietes R_K: R_K ist ein Gebiet eines metrischen Raumes und hat außerdem folgende Eigenschaften:

a) Zwei beliebige Punkte aus R_K sind durch eine Kürzeste verbindbar;

b) ein beliebiges Dreieck mit den Ecken in R_K hat einen nichtpositiven relativen Exzeß bezüglich der Krümmung K;

c) ist $K > 0$, so ist der Umfang jedes beliebigen Dreiecks mit den Ecken in R_K kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

Alle Schlußfolgerungen in diesem und den folgenden Paragraphen beziehen sich auf Gebiete R_K.

Aus dem allgemeinen Satz über die oberen Winkel eines Dreiecks, der im § 2 bewiesen wurde, folgt:

Lemma 1. *In einem R_K sind die oberen Winkel α, β, γ eines beliebigen Dreiecks höchstens gleich den entsprechenden Winkeln $\alpha_K, \beta_K, \gamma_K$ des entsprechenden Dreiecks auf der K-Ebene.* Denn nach dem erwähnten allgemeinen Satz ist $\alpha - \alpha_K \leq \nu$, und da die relativen Exzesse nichtpositiv sind, ist $\nu \leq 0$ und daher $\alpha \leq \alpha_K$.

2. Im weiteren spielt eine wichtige Rolle der folgende Satz der Elementargeometrie:

Lemma 2. *Möge das Vieleck Q auf der K-Ebene durch drei konvexe Polygone AB, BC, CA begrenzt sein, deren Wölbung ins Innere von Q gewandt ist (Abb. 6).*

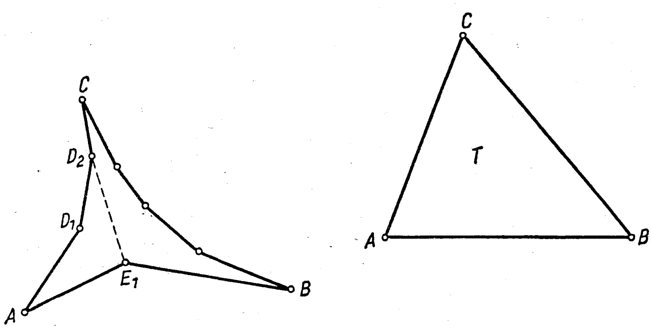

Abb. 6

Sei T das Dreieck, das sich aus dem Vieleck Q durch Geradebiegen dieser Polygone ergibt, d. h. ein Dreieck, dessen Seiten ebenso lang wie die Polygone AB, BC, CA sind. (Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich ein oder zwei dieser Polygone auf eine geradlinige Strecke reduzieren.)

Es wird behauptet, daß die Winkel des Vielecks Q bei A, B, C kleiner als die entsprechenden Winkel des Dreiecks T sind[8].

[8]) Das Dreieck T existiert, da jedes der Polygone AB, BC, CA kürzer als die Summe der beiden anderen ist; nur im Falle $K > 0$ ist zu fordern, daß der Umfang von Q kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$ ist.

Beweis. Wir beweisen diese Behauptung für den einfachsten Fall, in dem das Vieleck Q ein Viereck $ABCD$ mit dem eingeschlossenen Winkel D darstellt (Abb. 7). D. h., wir beweisen, daß die Winkel dieses Vierecks kleiner als die entsprechenden Winkel des Dreiecks T mit den Seiten AB, BC, $AD + DC$ sind. Für den Winkel bei B ist das evident. Wir wollen das etwa für den Winkel bei A beweisen.

Die Seite AD unseres Vierecks setzen wir durch die Strecke DE so fort, daß $DE = DC$ ist (Abb. 7). Dann sind bei den Dreiecken DBC und DBE die die

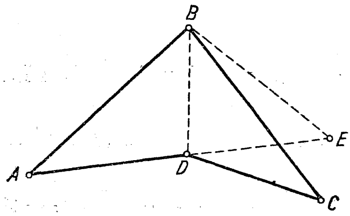

Abb. 7.

Winkel bei D einschließenden Seiten gleich, während der Winkel bei D im ersten Dreieck größer als im zweiten ist. Daher ist $BE < BC$.

Daraus folgt, daß im Dreieck ABE der Winkel bei A (d. h. der Winkel bei A in unserem Viereck) kleiner als der Winkel bei A im Dreieck mit den Seiten AB, BC, $AE = AD + DC$ ist. Das ist aber gerade das Dreieck T, so daß unsere Behauptung bewiesen ist.

Jetzt wird das Lemma für den allgemeinen Fall durch Induktion bzgl. der Eckenzahl des Vielecks Q bewiesen.

Indem wir etwa die Diagonale $D_2 E_1$ ziehen, schneiden wir vom Vieleck Q (Abb. 6) das Viereck $AD_1 D_2 E_1$ ab. Durch Streckung von $AD_1 D_2$ verwandeln wir dieses Viereck in ein Dreieck und vermindern dadurch im Vieleck Q die Zahl der Ecken D_i um eine. Nach dem Bewiesenen vergrößern sich die Winkel bei D_2 und E_1, und demnach bleiben die Streckenzüge AB und AC konvex. Genauso vergrößert sich der Winkel bei A. Durch Wiederholung dieser Konstruktion vergrößern wir jedes Mal den Winkel bei A, indem wir die Zahl der Ecken verringern. Auf diese Weise überzeugen wir uns durch Eliminieren aller Ecken auf den Streckenzügen AB, BC, CA, daß der Winkel bei A im Vieleck Q kleiner als der entsprechende im Dreieck T ist.

3. Nun beweisen wir den grundlegenden Satz über die Gebiete R_K:

Satz 1. *In einem R_K ist der Winkel $\gamma_{LM}^K(x, y)$ für zwei beliebige von einem Punkt ausgehende Kürzeste L, M eine nichtabnehmende Funktion von x und y.* (Der Winkel $\gamma(x, y)$ ist im § 1, Punkt 3. definiert.)

Beweis. Die Kürzesten L, M sollen vom Punkt 0 ausgehen. Wir nehmen auf M den Punkt Y und auf L die Punkte X, X_1 so an, daß $OX < OX_1$ (Abb. 8). Wir benutzen die Bezeichnungen $OY = y$, $OX = x$, $OX_1 = x_1$.

Indem wir die Kürzesten XY, $X_1 Y$ ziehen, erhalten wir die Dreiecke $T = OXY$, $T_1 = X_1 XY$. Auf der K-Ebene konstruieren wir die entsprechenden Dreiecke

$T^K = O'X'Y'$, $T_1^K = X_1'X'Y'$ und legen sie mit den Seiten $X'Y'$ aneinander, so daß sie das Viereck $Q = O'X'X_1'Y'$ bilden.

Nach Lemma 1 sind die Winkel in den Dreiecken T^K, T_1^K nicht kleiner als in T und T_1. Gleichzeitig ist nach Satz 2, § 2, die Summe der oberen Winkel beim Punkt X in den Dreiecken T und T_1 mindestens π, da diese Winkel Nebenwinkel sind. Daher ist die Summe der entsprechenden Winkel der Dreiecke T^K und T_1^K erst recht mindestens π. Nun bilden diese Winkel zusammen den Winkel bei X' im Viereck Q. Folglich besitzt dieses Viereck einen bei X' ins Innere

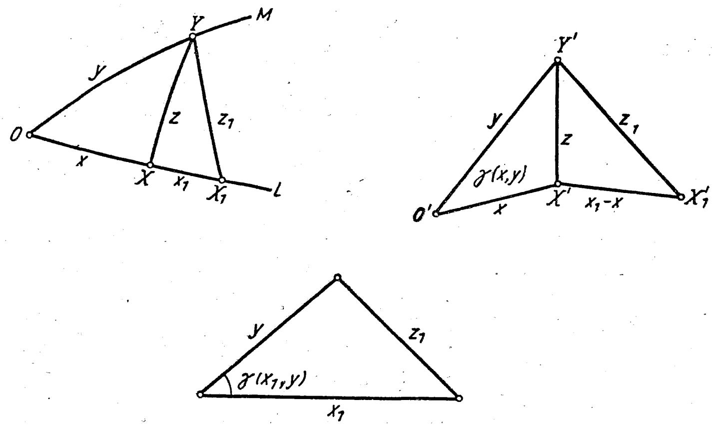

Abb. 8.

gehenden Winkel, oder stellt im Extremfalle — wenn der Winkel bei X' gleich π ist — ein Dreieck dar.

Wenn wir beim Geradebiegen des Winkels X' das Viereck Q in das Dreieck T_2^K verwandeln, so vergrößert sich der Winkel bei der Spitze O' entsprechend Lemma 2 (oder bleibt unverändert, falls Q bereits ein Dreieck darstellt).

Der entsprechende Winkel im Dreieck T_2^K ist nichts anderes als $\gamma(x_1, y)$. Der Winkel bei der Ecke O' im Viereck Q ist aber gleichzeitig ein Winkel im Dreieck T^K, d. h. nichts anderes als $\gamma(x, y)$.

Somit ist

$$\gamma(x, y) \leq \gamma(x_2, y),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Der Satz 1 kann, wie bereits im § 1, Punkt 5 vermerkt, auf die folgende Form gebracht werden:

Satz 2. *Seien X, Y Punkte auf den Seiten AB, BC des Dreiecks $T = ABC$ in einem R_K und X', Y' die entsprechenden Punkte auf den Seiten des entsprechenden Dreiecks $T^K = A'B'C'$ (d. h. $A'X' = AX$, $A'Y' = AY$), dann ist $XY \leq X'Y'$.*

4. Satz 3. *In einem R_K existiert zwischen zwei beliebigen, von einem Punkte ausgehenden Kürzesten ein Winkel, und für beliebige x und y ist dieser Winkel $\alpha_{LM} \leq \gamma_{LM}^K(x, y)$.*

Beweis. Da nach Satz 1 $\gamma_{LM}^{K}(x, y)$ eine nichtabnehmende Funktion ist, existiert $\lim\limits_{x,y \to 0} \gamma_{LM}^{K}(x, y)$, d. h. es existiert der Winkel α_{LM}, und dieser ist höchstens $\gamma_{LM}^{K}(x, y)$ für beliebige x und y.

Satz 4. *Die Dreieckswinkel in einem R_K sind höchstens gleich denen des entsprechenden Dreiecks auf der K-Ebene.* Dieser Satz folgt unmittelbar aus Lemma 1 und Satz 3.

Wir erwähnen noch, daß das Lemma 2 lediglich ein Spezialfall von Satz 4 ist. Dies liegt daran, daß das Vieleck Q auf der K-Ebene vom Standpunkt seiner inneren Metrik ein Gebiet R_K darstellt. Ist zudem Q durch drei konvexe Polygone begrenzt, die mit der Wölbung ins Innere von Q gewandt sind, so erweisen sich diese als Kürzeste in Q. Demnach ist das Vieleck Q vom Standpunkte seiner inneren Metrik ein Dreieck in einem Gebiet $R_K = Q$, und daher sind seine Winkel gemäß Satz 4 nicht größer als die des entsprechenden Dreiecks T.

5. Satz 5. *In einem R_K lassen sich zwei beliebige Punkte durch eine eindeutige Kürzeste verbinden.*

Nehmen wir einmal an, daß die von O ausgehenden Kürzesten L, M den gemeinsamen Endpunkt A haben. Wenn wir $OA = a$ setzen, haben wir offenbar

$$\gamma_{LM}^{K}(a, a) = 0 .$$

Da nun γ eine nichtabnehmende Funktion ist, gilt für ein beliebiges $x \leq a$

$$\gamma_{LM}^{K}(x, x) = 0 .$$

Dies bedeutet offensichtlich, daß L und M zusammenfallen.

Satz 6. *In einem R_K hängt eine Kürzeste stetig von ihren Endpunkten ab, d. h., wenn $A_n \to A$, $B_n \to B$, so konvergieren die Kürzesten A_nB_n gegen die Kürzeste AB.*

Beweis. Es sei $A_n \to A$, $B_n \to B$. Wir nehmen auf der Kürzesten AB irgend einen Punkt C und auf der Kürzesten A_nB_n den Punkt C_n so an, daß

$$AC : AB = A_nC_n : A_nB_n .$$

Wir ziehen die Kürzeste AB_n und nehmen auf ihr den Punkt D_n an, der sie im selben Verhältnis teilt (Abb. 9).

Indem wir auf das Dreieck ABB_n den Satz 2 anwenden und berücksichtigen, daß $AC : AB = AD_n : AB_n = t$ ist, überzeugen wir uns, daß $CD_n \to 0$ gemeinsam mit BB_n. Genauso $D_nC_n \to 0$ gemeinsam mit AA_n. Da aber $CC_n \leq CD_n + D_nC_n$, so ist erst recht $CC_n \to 0$ für AA_n und $BB_n \to 0$. Da nun C ein beliebiger Punkt der Kürzesten AB ist, so bedeutet das also, daß die Kürzesten A_nB_n gegen AB konvergieren, wenn A_n und B_n gegen A und B konvergieren.

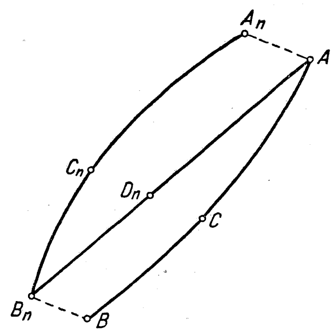

Abb. 9

6. Satz 7. *Wenn der Punkt O in einem R_K eine zur n-dimensionalen Kugel homöomorphe Umgebung U besitzt und r die Entfernung zwischen O und dem Rande von U ist, so läßt sich jede von O ausgehende Kürzeste mindestens bis zu einer Länge r fortsetzen.*

Beweis. $S(r)$ sei eine Sphäre vom Radius r um den Punkt O, d. h. die Menge aller Punkte X, die von O den Abstand $\varrho(O, X) = r$ besitzen. Aus der Voraussetzung ergibt sich $S(r) \subset U$; bildet man nun U auf die Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum ab, so darf man annehmen, daß $S(r)$ im euklidischen Raum gelegen ist und dort den Rand eines abgeschlossenen Gebietes (des Bildes der zum Punkt O gehörigen r-Umgebung) darstellt.

Eine Deformation der Sphäre $S(r)$ definieren wir folgendermaßen:

Nach Satz 5 mündet in jeden Punkt $X \in S(r)$ eine eindeutige Kürzeste OX. Für jedes t $(0 \leq t \leq 1)$ ordnen wir dem Punkte X einen Punkt X_t zu, der so auf der Kürzesten OX liegt, daß

$$\varrho(O, X_t) = t\, r = t\, \varrho(O, X)\,.$$

Die Stetigkeit der in dieser Weise definierten Deformation wird durch die stetige Abhängigkeit der Kürzesten OX vom Punkte X gewährleistet (Satz 6). Wir wollen annehmen, daß in der r-Umgebung des Punktes O ein solcher Punkt A existiert, daß sich die Kürzeste OA nicht bis zur Länge r, d. h. bis zur Sphäre $S(r)$ fortsetzen läßt. Ein solcher Punkt liegt auf keinem Radius der Sphäre $S(r)$. Daher wird er bei der beschriebenen Deformation der Sphäre $S(r)$ niemals auf das Bild der Sphäre $S(r)$ gelangen. Indessen lag der Punkt A vor der Deformation innerhalb des von der Sphäre $S(r)$ begrenzten Gebietes; er ist aber für kleine t mit Bestimmtheit außerhalb der Sphäre $S(tr)$ gelegen. Das widerspricht jedoch einem bekannten Satz der Topologie (vgl. z. B. [8], Kap. VI, Satz 10); folglich ist unser Satz bewiesen.

7. Satz 8. *Die Sphäre in einem R_K ist konvex* (wenn ihr Radius für $K > 0$ höchstens $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ ist). M. a. W., wenn in einem R_K die Punkte A, B von irgendeinem Punkt O höchstens um ein gewisses r entfernt sind, so daß etwa $OA \leq OB \leq r$, so ist ein beliebiger Punkt X der Kürzesten AB ebenfalls von O höchstens um r entfernt. (Für $K > 0$ wird $r \leq \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ vorausgesetzt.)

Beweis. Wir betrachten das Dreieck OAB und das entsprechende Dreieck $O'A'B'$ auf der K-Ebene. Auf AB nehmen wir den Punkt X und auf $A'B'$ den entsprechenden Punkt X' an, d. h. einen solchen, daß $A'X' = AX$. Dann ist nach Satz 2

$$O'X' \geq OX\,.$$

Gleichzeitig ist $O'X'$ höchstens gleich der größeren der Seiten $O'A'$ und $O'B'$. [Für $K \leq 0$ gilt das für ein beliebiges Dreieck auf der K-Ebene. Ist dagegen $K > 0$, so gilt das mit Bestimmtheit, wenn die größere der Seiten $O'A'$ und $O'B'$ höchstens $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ ist, d. h. höchstens gleich dem inneren Radius (der Hälfte des Meridians) derjenigen Halbsphäre ist, die in diesem Falle die K-Ebene darstellt.] Demnach ist

$$OX' \leq O'X' \leq O'B' = OB \leq r\,,$$

w. z. b. w.

8. Die Definition des Gebietes R_K fordert die Nichtpositivität des relativen Exzesses *jedes beliebigen* Dreiecks. Es ist erwünscht, diese Forderung abzuschwächen, indem die Nichtpositivität der relativen Exzesse lediglich für hinreichend kleine Dreiecke vorausgesetzt wird. Natürlich ist diese Forderung an und für sich unzureichend, da z. B. ein geschlossener Zylinder in diesem Sinne eine nichtpositive Krümmung besitzt, indessen er kein Gebiet R_0 ist, da es auf ihm durch zwei Kürzeste verbindbare Punkte gibt. Fordert man jedoch zusätzlich eine stetige Abhängigkeit der Kürzesten von ihren Endpunkten, so erhalten wir Bedingungen, die das Gebiet R_K definieren.

Diese Behauptung bildet den Inhalt des nun folgenden Satzes 9.

Dazu bemerken wir, daß die stetige Abhängigkeit der Kürzesten in einem kompakten Gebiet von ihren Endpunkten durch die Eindeutigkeit der Kürzesten zwischen zwei Punkten gewährleistet wird [9]).

Satz 9. *Das Gebiet G des metrischen Raumes genüge den folgenden drei Bedingungen:*

(1) *Zwei beliebige Punkte aus G lassen sich durch eine Kürzeste verbinden.*

(2) *Die Kürzeste ist von den Endpunkten stetig abhängig, d. h. wenn* $A_n, B_n \to A, B$, *so* $A_nB_n \to AB$.

(3) *Jeder Punkt hat eine Umgebung, in der der relative Exzeß eines beliebigen Dreiecks bzgl. der Krümmung K nichtpositiv ist.*

Dann ist der relative Exzeß auch für ein beliebiges Dreieck in G nichtpositiv.

Beweis. Da nach den Bedingungen des Satzes in der Umgebung jedes Punktes die Forderungen erfüllt werden, die das Gebiet R_K definieren, gelten in einer solchen Umgebung alle früheren Schlußfolgerungen bezüglich der Gebiete R_K. Daher existiert zwischen zwei beliebigen Kürzesten im Gebiet G ein bestimmter Winkel, und außerdem sind bei jedem „hinreichend kleinen" Dreieck die Winkel höchstens gleich denen des entsprechenden Dreiecks auf der K-Ebene (Sätze 3 und 4). Wir verwenden diese beiden Eigenschaften.

Jetzt sei $T = ABC$ ein beliebiges Dreieck im Gebiet G. Wir beweisen, daß ein beliebiger Dreieckswinkel, z. B. der Winkel α bei der Ecke A, höchstens gleich dem entsprechenden Winkel des aus gleichlangen Seiten konstruierten Dreiecks T^K ist. Dadurch wird der Satz bewiesen sein.

Auf BC nehmen wir die Punkte $D_0 = B$, D_1, D_2, . . ., $D_n = C$ an und ziehen die Kürzesten AD_0, AD_1, . . ., AD_n. Wir erhalten die „schmalen" Dreiecke $T_i = AD_{i-1}D_i$. Da die Kürzeste AD wegen der Bedingung (2) stetig vom Punkte D abhängig ist, werden die benachbarten Kürzesten AD_{i-1}, AD_i hinreichend nahe beieinander liegen, sobald die Punkte D_i auf BC hinreichend dicht angeordnet sind. Auf den Kürzesten AD_i nehmen wir die Punkte $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{im}$ an. Durch Verbinden dieser Punkte auf den Seiten jedes „schmalen" Dreiecks T_i, wie auf Abb. 10 gezeigt ist, erhalten wir die „kleinen" Dreiecke T_{ij}.

[9]) In einem kompakten Gebiet enthält jede Folge von Kurven mit Längen, die insgesamt beschränkt sind, eine konvergente Unterfolge. Ist gleichzeitig $A_n \to A$, $B_n \to B$, so ist die Grenze jeder konvergenten Unterfolge aus Kürzesten A_nB_n eine Kürzeste AB. Wenn daher diese Kürzeste eindeutig ist, gilt $A_nB_n \to AB$.

Indem wir jedem Dreieck T_{ij} das entsprechende Dreieck T_{ij}^K auf der K-Ebene zuordnen, erhalten wir natürlich in dieser eine Abwicklung Q, die aus diesen Dreiecken T_{ij}^K zusammengesetzt ist. Q besteht gleichzeitig aus „schmalen" Vielecken Q_i, von denen jedes dem „schmalen" Dreieck T_i entspricht (d. h. Q_i wird

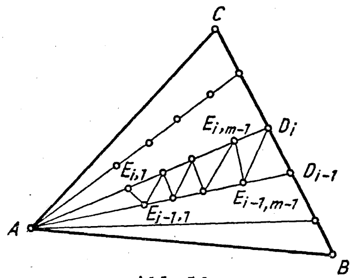

Abb. 10

aus den Dreiecken T_{i1}^K, T_{i2}^K, ... zusammengesetzt). Bei hinreichender Dichte der Anordnung der Punkte D_i und E_{ij} werden die Dreiecke T_{ij} so klein sein, daß bei jedem von ihnen die Winkel höchstens gleich denen des entsprechenden Dreiecks T_{ij}^K sind.

Es gibt sozusagen drei Typen von Winkeln der Dreiecke T_{ij} bzw. T_{ij}^K:

a) die Winkel α_i bzw. α_i^K bei der Ecke A;
b) die Winkel bei den Ecken E_{ij} innerhalb der Kürzesten AD_i;
c) die Winkel bei den Ecken D_i.

Ist α der Winkel des Ausgangsdreiecks T bei der Ecke A, so ist nach Satz 1, § 2 $\alpha = \sum \alpha_i$. Da aber $\alpha_i \leq \alpha_i^K$, so

$$\alpha \leq \sum \alpha_i^K . \qquad (1)$$

Ferner ist bei den kleinen Dreiecken T_{ij}, die dem schmalen Dreieck T_i „einbeschrieben" sind, die Summe der in einer Ecke auf der Kürzesten AD_i oder AD_{i-1} zusammenlaufenden Winkel mindestens π (wie das aus den Sätzen 1 und 2, § 2 folgt). Um so mehr ist die Summe der in einer Ecke zusammenlaufenden Winkel der Dreiecke T_{ij}^K mindestens π. Das bedeutet, daß die Streckenzüge $A'D_i'$, $A'D_{i-1}'$, die das schmale Vieleck Q_i begrenzen, konvex und mit der Wölbung ins Innere dieses Vielecks gewandt sind.

Daher können wir das Lemma 2 benutzen. Nach diesem Lemma sind die Winkel im Vieleck Q_i höchstens gleich den Winkeln im Dreieck T_i^K, das sich durch Geradebiegen der Q_i berandenden Polygone ergibt. (Jedes solche Dreieck T_i^K ist offensichtlich nichts anderes als das Dreieck, das dem schmalen Dreieck T_i entspricht, hat also Seiten von derselben Länge.) Wenn wir die Winkel der Dreiecke T_i^K bei den Ecken, die A entsprechen, mit $\bar{\alpha}_i^K$ bezeichnen, erhalten wir $\alpha_i^K \leq \bar{\alpha}_i^K$, so daß aus (1)

$$\alpha \leq \sum \bar{\alpha}_i^K \qquad (2)$$

folgt.

Ferner ist die Summe der Winkel der kleinen Dreiecke, die in einer Ecke D_i innerhalb der Seite BC zusammenlaufen, mindestens π (wiederum auf Grund der Sätze 1 und 2, § 2). Daher ist erst recht die Summe der entsprechenden Winkel der Dreiecke T^K_{ij} mindestens π, und schließlich ist um so mehr die Summe der Winkel der Dreiecke T^K_i und T^K_{i+1} bei einer Ecke D_i mindestens π.

Das bedeutet, daß das Vieleck P, das aus sukzessiv aneinandergelegten Dreiecken T^K_i zusammengesetzt ist, durch den konvexen Streckenzug $B''C''$ berandet wird, der mit der Wölbung ins Innere von P gewandt ist. Biegt man diesen Streckenzug auseinander, so erhält man offenbar das Dreieck T^K, das dem Ausgangsdreieck T entspricht (also mit Seiten von derselben Länge). Indem wir hier wieder das Lemma 2 anwenden, überzeugen wir uns, daß der Winkel des Vielecks P bei der Ecke A'' höchstens gleich dem entsprechenden Winkel des Dreiecks T^K ist, d. h., daß

$$\sum \bar{\alpha}_i^K \leq \alpha^K .$$

Durch Vergleichen dieser Ungleichung mit (2) sehen wir, daß

$$\alpha \leq \alpha^K ,$$

w. z. b. w.

9. Zum Schluß dieses Paragraphen beweisen wir die Äquivalenz der beiden Definitionen für einen Raum mit der Krümmung $\leq K$, die im § 1, Punkt 5 ausgesprochen wurden.

Satz 10. *Damit ein metrischer Raum auch ein Raum mit der Krümmung $\leq K$ in dem Sinne ist, daß jeder Punkt eine Umgebung R_K besitzt, ist es notwendig und hinreichend, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *jeder Punkt besitzt eine Umgebung, in der sich zwei beliebige Punkte durch eine Kürzeste verbinden lassen;*

(2) *für eine beliebige Folge von Dreiecken T, die gegen einen Punkt konvergieren, ist*

$$\overline{\lim}\, \frac{\delta_0(T)}{S(T^0)} \leq K , \tag{3}$$

wo $\delta_0(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ der Exzeß des Dreiecks T ist und $S(T^0)$ der Flächeninhalt des T entsprechenden Dreiecks T^0 in der euklidischen Ebene ist.

(Es wird angenommen, daß $\delta_0(T) \leq 0$, wenn $S(T^0) = 0$, zumindest für Dreiecke der Folge mit hinreichend großer Nummer, so daß der in (3) stehende Bruch entweder $-\infty$ oder $0/0$ ist, was als $\leq K$ aufgefaßt wird.)

Beweis für die Notwendigkeit der Bedingungen. Es muß offensichtlich lediglich die Notwendigkeit der zweiten Bedingung bewiesen werden. Hierzu bemerken wir: da für den relativen Exzeß

$$\delta_K(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha^K + \beta^K + \gamma^K) ,$$

gilt:

$$\delta_K(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) - (\alpha^K + \beta^K + \gamma^K - \pi) = \delta_0(T) - \delta_0(T^K) , \tag{4}$$

d. h., der relative Exzeß des Dreiecks T ist die Differenz der „absoluten" Exzesse der Dreiecke T und T^K.

Der Exzeß $\delta_0(T^K)$ des Dreiecks auf der K-Ebene ist bekanntlich proportional seinem Flächeninhalt $S(T^K)$, d. h.

$$\delta_0(T^K) = KS(T^K). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt, daß die Bedingung

$$\delta_K(T) \leq 0$$

gleichbedeutend mit

$$\delta_0(T) \leq KS(T^K) \tag{6}$$

ist.

Ist das Dreieck T^K klein, so unterscheidet sich sein Flächeninhalt verhältnismäßig wenig von dem des Dreiecks T^0 auf der euklidischen Ebene; und speziell ist $S(T^K) = 0$ dann und nur dann, wenn $S(T^0) = 0$. Daher darf behauptet werden, daß

$$S(T^K) = A(T) \cdot S(T^0),$$

wobei $A(T) \to 1$, wenn die Seiten des Dreiecks T gegen Null streben.

Daher darf man an Stelle (6)

$$\delta_0(T) \leq KS(T^0)\, A(T) \tag{7}$$

schreiben; daraus folgt für jede beliebige Folge von Dreiecken, die sich auf einen Punkt zusammenziehen, weil hierbei $A \to 1$:

$$\overline{\lim} \frac{\delta_0(T)}{S(T^0)} \leq K$$

(hierbei wird $S(T^0) = 0$ zugelassen, dann aber ist wegen (7) $\delta_0(T) \leq 0$).

B e w e i s d a f ü r, d a ß d i e B e d i n g u n g e n h i n r e i c h e n d s i n d. Aus der zweiten Bedingung des Satzes folgt, daß sich für jedes beliebige $K' > K$ zu einem beliebigen gegebenen Punkte O eine Umgebung U finden läßt, in der für jedes Dreieck T

$$\delta_0(T) \leq K'S(T^0). \tag{8}$$

Auf Grund der ersten Bedingung kann diese Umgebung auch so gewählt werden, daß in ihr zwei beliebige Punkte durch eine Kürzeste verbunden werden können.

Bekanntlich ist [10])

$$S(T^0) \geq S(T^{K'}) \text{ für } K' \leq 0,$$
$$S(T^0) \leq S(T^{K'}) \text{ für } K' \geq 0.$$

Daher folgt aus (8), daß

$$\delta_0(T) \leq K'S(T^{K'}).$$

Da aber $K'S(T^{K'}) = \delta_0(T^{K'})$, so ist

$$\delta_{K'}(T) = \delta_0(T) - \delta_0(T^{K'}) \leq 0.$$

D. h., in der Umgebung U ist der relative Exzeß eines beliebigen Dreiecks bzgl. K nicht positiv.

---

[10]) Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, daß dieses bekannte Ergebnis unmittelbar im Satz 1, § 5 über den Flächeninhalt eines Dreiecks in einem R_K enthalten ist.

Da alle Schlüsse mit einem beliebigen $K' > K$ für die Umgebung eines beliebigen Punktes gültig sind, kann man sagen, daß unser Raum sich als einer mit der Krümmung $\leq K'$ für beliebiges $K' > K$ erweist. Daraus folgt bereits, daß er auch ein Raum mit der Krümmung $\leq K$ ist. Um uns davon zu überzeugen, kehren wir zur Umgebung U des Punktes O zurück. Wir trennen in ihr die Umgebung V desselben Punktes O so ab, daß sich zwei beliebige Punkte aus V durch eine in U liegende Kürzeste verbinden lassen. Dann ist auf Grund des Bewiesenen bei einem beliebigen Dreieck mit den Ecken in V der Exzeß bzgl. K' nichtpositiv. Das bedeutet, daß V ein Gebiet $R_{K'}$ ist und speziell die Kürzesten in ihm stetig von den Endpunkten abhängen.

Somit werden in der Umgebung V die beiden ersten Bedingungen des Satzes 9 erfüllt, nämlich 1. die Existenz der Kürzesten und 2. ihre stetige Abhängigkeit von den Endpunkten. Außerdem hat auf Grund des eben Bewiesenen jeder Punkt aus V für ein *beliebiges* $K' > K$ eine Umgebung, in der die Exzesse der Dreiecke bzgl. K' nichtpositiv sind. Das bedeutet, daß für ein *beliebiges* $K' > K$ in V auch die dritte Bedingung des Satzes 9 erfüllt ist.

Aber dann ist nach Satz 9 auch für jedes Dreieck $T \subset V$ bei beliebigem $K' > K$

$$\delta_{K'}(T) \leq 0 .$$

Da dies aber für ein beliebiges $K' > K$ gilt, so ist auch offenbar

$$\delta_K(T) \leq 0 .$$

[In der Tat ist $\delta_{K'}(T) = (\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha^{K'} + \beta^{K'} + \gamma^{K'})$ und für ein gegebenes T bei $K' \to K$ konvergieren die Winkel $\alpha^{K'}, \beta^{K'}, \gamma^{K'}$ offenbar gegen $\alpha^K, \beta^K, \gamma^K$; d. h. $\delta_{K'}(T) \to \delta_K(T)$.]

Somit erweist sich die Umgebung V als ein Gebiet R_K, und da jeder Punkt O eine Umgebung solcher Art besitzt, ist unser Raum ein Raum mit der Krümmung $\leq K$.

§ 4. Die Richtung einer Kurve und der Winkel eines Richtungskegels

1. Die Richtung. Die folgende Definition der „Richtung" bezieht sich auf einen beliebigen metrischen Raum.

Wir sagen, daß eine von einem Punkt O ausgehende Kurve dort eine bestimmte *Richtung* hat, wenn der obere Winkel, den sie mit sich selbst bildet, Null ist.

Aus dem Begriff der Kürzesten selbst schließen wir leicht:

Satz 1. *Jede Kürzeste hat im Anfangspunkte eine bestimmte Richtung.*

Es läßt sich beweisen, daß im Riemannschen Raum die Existenz der Richtung einer Kurve im Sinne der hier angegebenen Definition gleichbedeutend mit der Existenz einer tangierenden Geodätischen ist.

Wir sagen ferner, daß zwei von einem Punkt ausgehende Kurven L_1, L_2 in diesem Punkte *ein und dieselbe Richtung* haben, wenn der obere Winkel zwischen ihnen Null ist. Dann haben beide Kurven eine bestimmte Richtung, weil nach Satz 1, § 2

$$\alpha_{12} + \alpha_{21} \geq \alpha_{11}$$

und demnach für $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ ebenso $\alpha_{11} = 0$.

Lemma 1. *Wenn die von einem Punkt ausgehenden Kurven L_1, L_2 eine gemeinsame Richtung mit der Kurve L_3 haben, so haben sie auch miteinander eine gemeinsame Richtung.*

Da nämlich

$$\alpha_{12} \leq \alpha_{13} + \alpha_{32},$$

so folgt aus $\alpha_{13} = \alpha_{32} = 0$, daß $\alpha_{12} = 0$.

Lemma 2. *Wenn die Kurven L_1 und L_2 dieselbe Richtung haben, so wird für jede beliebige Kurve L_3 der obere Winkel α_{13} zwischen L_1 und L_3 gleich dem oberen Winkel α_{23} zwischen L_2 und L_3 sein.*

Nach Satz 1, § 2 ist in der Tat $\alpha_{13} + \alpha_{12} \geq \alpha_{23}$, so daß $\alpha_{13} \geq \alpha_{23}$, wenn $\alpha_{12} = 0$. Aber genauso ist $\alpha_{23} \geq \alpha_{13}$. Daher ist $\alpha_{13} = \alpha_{23}$, w. z. b. w.

Auf Grund von Lemma 1 zerfallen alle Kurven, die von einem gegebenen Punkt ausgehen und in ihm eine bestimmte Richtung haben, in Klassen von Kurven mit gemeinsamer Richtung. Das gestattet, den Begriff der Richtung in einem gegebenen Punkte einzuführen, ohne ihn mit einer bestimmten Kurve zu verbinden, und Lemma 2 gestattet, vom oberen Winkel oder einfach einem Winkel zwischen den Richtungen in einem Punkt zu sprechen.

Wenn α_{12}, α_{23}, α_{31}, die Winkel zwischen den Richtungen D_1, D_2, D_3 sind, so folgt aus Satz 1, § 2 unmittelbar:

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} \geq \alpha_{13}.$$

M. a. W., es gilt

Satz 2. *Die Richtungen in einem gegebenen Punkt bilden einen metrischen Raum mit der Metrik ihrer oberen Winkel.*

2. Die Richtungen in einem R_K. In einem R_K hat nicht nur jede Kürzeste im Anfangspunkt eine Richtung, sondern der zwischen der Richtung und der Kürzesten bestehende Zusammenhang ist außerdem stetig, d. h. wenn die vom Punkt O ausgehenden Kürzesten L_n gegen L konvergieren, so konvergieren ihre Richtungen gegen die Richtung von L. Hat nun der Punkt O in einem R_K eine der Kugel homöomorphe Umgebung, so tritt in jeder Richtung in O eine Kürzeste aus, wobei jedoch in einer Richtung in O ein Kontinuum von Kürzesten austreten kann. Diese Behauptungen sind in den nachfolgenden Sätzen enthalten.

Satz 3. *Wenn in einem R_K die vom Punkt O ausgehenden Kürzesten L_n, M_n gegen die Kürzesten L, M konvergieren, so konvergieren die Winkel $\alpha(L_n, M_n)$ gegen den Winkel $\alpha(L, M)$. Wenn insbesondere $L_n \to L$, so ist $\alpha(L_n, L) \to 0$.* (Es genügt, $L = M_1 = M_2 = \cdots$ zu setzen.) Da der Winkel zwischen den Richtungen der Kürzesten definitionsgemäß der Winkel zwischen den Kürzesten selbst ist, so ist dies hier die Behauptung über die Konvergenz der Richtungen von konvergierenden Kürzesten.

Beweis. Wir betrachten die Kürzesten, die von einem gegebenen Punkte O im R_K austreten. Es sei $L_n \to L$. Auf L_n, L nehmen wir die von O gleich weit entfernten Punkte A_n, A an, so daß $OA_n = OA = a$. Wenn nun $\gamma_n(a, a)$ ein Winkel in dem Dreieck ist, das OAA_n auf der K-Ebene entspricht, so gilt nach

Satz 1, § 3

$$\gamma_n(a, a) \geq \alpha(L, L_n).$$

Wegen $L_n \to L$ haben wir aber $\gamma_n(a, a) \to 0$ und demnach $\alpha(L, L_n) \to 0$.

Sei jetzt $L_n \to L$, $M_n \to M$. Es gilt wegen der „Dreiecksungleichung" für Winkel

$$|\alpha(L, M) - \alpha(L_n, M_n)| \leq \alpha(L, L_n) + \alpha(M, M_n);$$

nach dem Bewiesenen ist $\alpha(L, L_n)$, $\alpha(M, M_n) \to 0$, so daß $\alpha(L_n, M_n) \to \alpha(L, M)$, w. z. b. w.

Lemma 3. *Hat in einem R_K die vom Punkt O austretende Kurve L eine Richtung in O, so strebt der obere Winkel zwischen L und ihrer Sehne OX, d. h. der Kürzesten OX, $X \in L$, gegen Null für $X \to O$.* M. a. W., die Richtung einer Kurve ist die Grenze der Richtungen ihrer Sehnen oder Sekanten OX.

Beweis. Nach der Definition des oberen Winkels ist

$$\alpha(L, OX) = \overline{\lim_{Y, Z \to O}} \ \gamma(Y, Z),$$

wo $Y \in L$, $Z \in OX$. Da nach Satz 1, § 3 γ eine nichtabnehmende Funktion von OZ ist, gilt

$$\gamma(Y, Z) \leq \gamma(Y, X)$$

und folglich

$$\alpha(L, OX) \leq \overline{\lim_{Y \to O}} \gamma(Y, X).$$

Da aber die Kurve eine Richtung hat, ist

$$\overline{\lim_{X, Y \to O}} \ \gamma(Y, X) = 0.$$

Folglich

$$\overline{\lim_{Y \to O}} \alpha(L, OX) = 0.$$

Satz 4. *Hat der Punkt O in einem R_K eine der Kugel homöomorphe Umgebung, so tritt in jeder Richtung von O eine Kürzeste heraus.*

Beweis. Sei D eine gewisse Richtung in O und L eine Kurve, die von O in dieser Richtung heraustritt. Auf L nehmen wir die Punkte $X_n \to O$ an und ziehen die Sekanten OX_n, nach Satz 7, § 3 kann man sie bis zur selben Länge r fortsetzen. Aus den in dieser Weise erhaltenen Kürzesten M_n wählen wir eine konvergierende Folge aus. Die Grenzkurve M ist eine Kürzeste, die in O die gegebene Richtung D besitzt. Denn nach Satz 3 konvergieren die Richtungen der Kürzesten M_n gegen die Richtung D_M der Grenzkürzesten M, und nach Lemma 3 konvergieren sie wiederum gegen die Richtung D der Kurve L. Demnach fällt D_M mit D zusammen.

Bemerkung 1. Daß die Bedingung des Satzes 4 wesentlich ist, zeigt das folgende einfache Beispiel. Ein gewöhnlicher (abgeschlossener) Kreis in einer Ebene stellt offensichtlich einen Raum mit der Krümmung ≤ 0 dar, aber von einem Punkte auf der Peripherie geht überhaupt keine Kürzeste in Richtung der Peripherie aus.

2. Aus dem Beweis des Satzes 4 folgt unmittelbar: wenn der Punkt O in einem R_K eine zur Kugel homöomorphe Umgebung hat und die von O austretende Kurve L eine Richtung besitzt, so hat L eine tangierende Kürzeste; denn jede Folge von Sekanten enthält eine Unterfolge, die gegen die Kürzeste in derselben Richtung konvergiert. Diese Tangente braucht jedoch nicht eindeutig bestimmt zu sein, was einfachste Beispiele zeigen. Allgemein gesagt gibt es eine Kontingenz von tangierenden Kürzesten in einer Richtung.

Satz 5. *Wenn die von einem Punkte O austretenden Kurven L, M in einem R_K in O Richtungen haben, so existiert ein Winkel zwischen ihnen, und dieser ist gleich dem Grenzwert der Winkel zwischen den Sehnen; wenn X und Y Punkte auf L und M sind, so gilt*

$$\alpha(L, M) = \lim_{Y\to O} \alpha(L, OY) = \lim_{X\to O} \alpha(OX, M) = \lim_{X,\,Y\to O} \alpha(OX, OY)\,.$$

(Setzen wir speziell $M = L$, so erhalten wir die Behauptung von Lemma 3, daß nämlich für $X \in L$ und $X \to O$ stets $\alpha(L, OX) \to 0$.)

Beweis. Es sei $\bar{\alpha}(L, M)$ der obere Winkel zwischen L und M. Nach der Definition ist

$$\bar{\alpha}(L, M) = \overline{\lim_{X,\,Y\to O}}\ \gamma(X, Y)\,. \tag{1}$$

Andererseits ist nach der „Dreiecksungleichung" für die oberen Winkel

$$\bar{\alpha}(L, M) \leq \alpha(OX, OY) + \bar{\alpha}(L,OX) + \bar{\alpha}(M, OY)\,.$$

Da aber nach Lemma 3

$$\lim \bar{\alpha}(L, OX) = \lim \bar{\alpha}(M, OY) = 0\,,$$

so gilt

$$\bar{\alpha}(L, M) \leq \underline{\lim_{X,\,Y\to O}}\ \alpha(OX, OY)\,. \tag{2}$$

Schließlich ist nach Satz 1, § 3

$$\alpha(OX, OY) \leq \gamma(X, Y)\,. \tag{3}$$

Vergleichen wir jetzt (1), (2), (3), so erhalten wir

$$\alpha(L, M) = \lim \gamma(X, Y) = \lim \alpha(OX, OY)\,,$$

d. h., erstens existiert $\lim \gamma(X, Y)$, d.h., es existiert ein Winkel zwischen L und M, und zweitens ist er gleich dem Grenzwert der Winkel $\alpha(OX, OY)$. Die anderen im Satz angegebenen Gleichungen werden analog bewiesen.

3. Der Winkel des Richtungskegels. Wir betrachten den aus Richtungen in einem gegebenen Punkt O bestehenden Raum, wobei O einem gewissen metrischen Raum angehört. Der Kegel C von Richtungen D in O wird als Kurve in diesem Raum der Richtungen definiert, d. h. er wird durch die stetige Funktion $D(t)$, $a \leq t \leq b$ vorgegeben. Der Winkel eines solchen Kegels wird als Länge dieser Kurve in der Metrik der Winkel definiert; d.h., der Winkel β des Kegels $C(D(t), a \leq t \leq b)$ ist

$$\beta(C) = \operatorname{Sup} \sum_{i=1}^{n} \alpha[D(t_{i-1}),\ D(t_i)]\,,$$

wo α der Winkel zwischen den Richtungen und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ ist.

Da jede von O ausgehende Kürzeste in O eine Richtung hat, bestimmt der Kegel der von O ausgehenden Kürzesten $L(t)$ $(a \leq t \leq b)$ den Richtungskegel. Der Winkel des Kegels von Kürzesten in der Spitze O ist dann eben der Winkel des Richtungskegels. (In einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit stimmt der Winkel dieses Kegels im wesentlichen mit dem Sektorwinkel überein, so wie er in [1] definiert ist.) Aber selbst wenn vom Punkt O in jeder Richtung eine Kürzeste austritt, so braucht der Richtungskegel den Kegel der Kürzesten nicht eindeutig zu bestimmen, wenn nämlich nicht in jeder Richtung in O eine eindeutige Kürzeste austritt. Wenn aber in jeder Richtung in O genau eine Kürzeste austritt und der Zusammenhang von Richtung und Kürzester stetig wie in einem R_K ist, so gibt jeder Richtungskegel den Kegel der Kürzesten vor.

Für zwei Richtungen D_1, D_2 in einem Punkt irgend eines metrischen Raumes wird — ähnlich der zwei Punkte verbindenden Kürzesten — in natürlicher Weise der sie verbindende Richtungskegel mit dem kleinsten Winkel definiert. Solch ein „kürzester Kurs" stellt eine Analogie zum ebenen Sektor dar und ergibt gleichsam die metrische Definition für das Ebenenelement. Natürlich braucht solch ein Kegel im Falle eines willkürlichen metrischen Raumes nicht zu existieren, und wenn er auch existiert, so könnte sich sein Winkel größer als der Winkel zwischen den Richtungen D_1 und D_2 erweisen.

Aber in einem R_K, jedenfalls für die Richtungen, in denen Kürzeste von einem gegebenen Punkte ausgehen, ist das ausgeschlossen, wie das der in diesem Paragraphen bewiesene Satz 7 zeigt. Aber vorher wollen wir den Kegel untersuchen, bestehend aus allen Kürzesten, die von einem gewissen Punkt A nach den Punkten irgend einer Kürzesten BC gehen.

4. Wir nehmen in einem Gebiet R_K irgend ein Dreieck ABC an und ziehen von A dieKürzesten AX nach allen Punkten X der Seite BC. Da sich die Kürzeste AX nach Satz 6, § 3 mit der stetigen Bewegung ihres Endpunkts X stetig ändert, bilden alle Kürzesten AX eine Art Fläche[11]). Diese Fläche nennen wir *das aus der Ecke A aufgespannte Flächendreieck ABC*. Das ist nun der *Kürzestenkegel AX*.

Ein solches Flächendreieck kann durch stetige Abbildung des ebenen Dreiecks folgendermaßen dargestellt werden. Das ebene Dreieck $A'B'C'$ möge Seiten von derselben Länge wie ABC haben. Dem Punkte X' auf $B'C'$ ordnen wir den Punkt X auf BC so zu, daß $B'X' = BX$; dann ist der Strecke $A'X'$ die Kürzeste AX zugeordnet; dem Punkte Y' auf $A'X'$ kann man den Punkt Y auf AX nach der Bedingung zuordnen, daß $A'Y' : A'X' = AY : AX$. Auf diese Weise wird das Dreieck $A'B'C'$ auf das Flächendreieck ABC abgebildet. Diese Abbildung ist infolge der stetigen Abhängigkeit der Kürzesten von ihren Endpunkten (Satz 6, § 3) stetig. Die so definierte Abbildung nennen wir *Standardabbildung*.

Da die Kürzesten AX eine stetige Schar bilden, bilden nach Satz 3 ihre Richtungen im Punkte A ebenfalls eine stetige Schar.

---

[11]) Wir bemerken, daß verschiedene Kürzeste AX selbst in einfachen Fällen längs gewissen Strecken zusammenfallen können, wie das in Abb. 11 gezeigt ist.

Der Winkel des von den Kürzesten AX gebildeten Sektors ist nach der oben gegebenen Definition die obere Grenze der Summen der Winkel zwischen den Kürzesten AX_{m-1}, AX_m, die von A sukzessive nach den Punkten $B, X_1, X_2, \cdots, X_n, C$ gehen. Diesen Winkel wird man in natürlicher Weise den Winkel des Flächendreiecks in der Ecke A nennen.

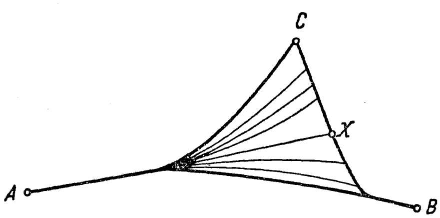

Abb. 11

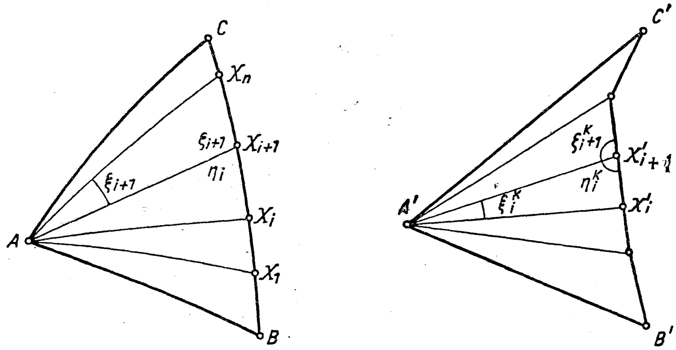

Abb. 12

5. Satz 6. *$T = ABC$ sei das von der Ecke A aus aufgespannte Flächendreieck und $T^K = A'B'C'$ ein Dreieck mit gleichlangen Seiten auf der K-Ebene. Wenn α und α_K die Winkel der Dreiecke T und T^K in den Ecken A und A' im Sinne der eben gegebenen Definition des Winkels eines Flächendreiecks bezeichnen, so ist*

$$\alpha \leq \alpha_K \tag{4}$$

und $\alpha = \alpha_K$ gilt nur, wenn das Dreieck T isometrisch zu T^K ist.

(Da der Winkel des Flächendreiecks offensichtlich mindestens gleich dem Winkel zwischen seinen Seiten ist, verschärft die Ungleichung (4) den Satz 4, § 3. Ist der Winkel zwischen den Seiten AB und AC gleich α_K, so gilt außerdem aus demselben Grunde erst recht $\alpha = \alpha_K$; dann aber sind nach der Behauptung des Satzes die Dreiecke T und T^K isometrisch. Demnach ist hier die notwendige Bedingung für die Gleichheit der Winkel zwischen den Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ enthalten.)

Wir beweisen die Ungleichung (4). Wir geben ein gewisses $\varepsilon > 0$ vor. Auf der Seite BC des Dreiecks ABC nehmen wir die Punkte $X_0 = B$, X_1, X_2, $\cdots$, X_n, $C = X_{n+1}$ an, die sukzessiv angeordnet sind. Seien $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ die Winkel zwischen AB und AX_1, AX_1 und AX_2 usw. (Abb. 12). Die Punkte X_i können so dicht angenommen werden, daß

$$\alpha - \varepsilon < \sum_{i=0}^{n} \xi_i \tag{5}$$

wird.

Auf der K-Ebene konstruieren wir die Dreiecke $T_i^K = A'X_i' X_{i+1}'$ mit denselben Seiten wie die Dreiecke $T_i = AX_i X_{i+1}$. Sind ξ_i^K die Winkel der Dreiecke T_i^K bei der Ecke A', so ist nach Satz 4, § 3

$$\xi_i^K \geq \xi_i \, . \tag{6}$$

Durch Anlegen der Dreiecke T_i^K aneinander in der Weise, wie die Dreiecke T_i aneinander lagern, erhalten wir das Vieleck $P = A'B'X_1' \cdots X_n' \, C_n'$. Sein Winkel bei der Ecke A' ist gleich $\sum \xi_i^K$, und infolge (5) und (6) gilt

$$\sum \xi_i^K > \alpha - \varepsilon \, . \tag{7}$$

Gleichzeitig sind die Winkel des Vielecks P in den Ecken X_i' mindestens π. In der Tat setzt sich jeder dieser Winkel aus den Winkeln η_i^K, ζ_{i+1}^K der beiden benachbarten Dreiecke T_i^K und T_{i+1}^K zusammen. Nach Satz 4, § 3 sind diese Winkel mindestens gleich den entsprechenden Winkeln η_i, ζ_{i+1} der Dreiecke T_i, T_{i+1}

$$\eta_i^K \geq \eta_i \, , \quad \zeta_{i+1}^K \geq \zeta_{i+1} \, .$$

Nun sind die Winkel η_i, ζ_{i+1} Nebenwinkel und daher ist $\eta_i + \zeta_{i+1} \geq \pi$. Folglich ist um so mehr $\eta_i^K + \zeta_{i+1}^K \geq \pi$.

Somit läßt sich auf das Vieleck P das Lemma 1 anwenden: indem wir es zu einem Dreieck geradebiegen, vergrößern wir seinen Winkel bei der Spitze A'. Das ergibt nichts anderes als das Dreieck $T^K = A'B'C'$, und dabei handelt es sich um seinen Winkel α_K. Nun ist der Winkel des Vielecks P bei der Spitze A' gleich $\sum \xi_i^K$, so daß

$$\sum \xi_i^K \leq \alpha_K \, .$$

Gemeinsam mit (7) ergibt das

$$\alpha_K > \alpha - \varepsilon \, ,$$

und da ε willkürlich ist, gilt

$$\alpha_K \geq \alpha \, .$$

6. Nun beweisen wir, daß die Dreiecke T und T^K isometrisch sind, wenn $\alpha_K = \alpha$.

Wir nehmen auf BC irgendeinen Punkt D an (Abb. 13) und betrachten die Flächendreiecke $T_1 = ABD$, $T_2 = ACD$ und die ihnen entsprechenden Dreiecke $T_1{}^K$ und $T_2{}^K$. Sind $\alpha', \alpha'', \alpha_K', \alpha_K''$ die Winkel dieser Dreiecke, so ist

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha \, , \tag{8}$$

$$\alpha_K' \geq \alpha' \, , \quad \alpha_K'' \geq \alpha'' \, . \tag{9}$$

Außerdem ist nach Lemma 2, § 3 in dem Viereck, das aus den Dreiecken $T_1{}^K$ und $T_2{}^K$ zusammengesetzt ist, der Winkel bei der Ecke D'

$$\delta_K \geq \pi \, .$$

Demnach ist nach Lemma 1, § 3

$$\alpha'_K + \alpha''_K \leq \alpha_K, \tag{10}$$

und zwar ist $\alpha'_K + \alpha''_K = \alpha_K$ nur dann, wenn $\delta_K = \pi$. Aber aus (8), (9), (10) folgt, daß

$$\alpha_K \geq \alpha'_K + \alpha''_K \geq \alpha .$$

Für $\alpha = \alpha_K$ folgt dann aber $\alpha'_K + \alpha''_K = \alpha_K$, so daß $\delta_K = \pi$, d. h. das Viereck $T_1^K + T_2^K$ stimmt mit dem Dreieck T^K überein.

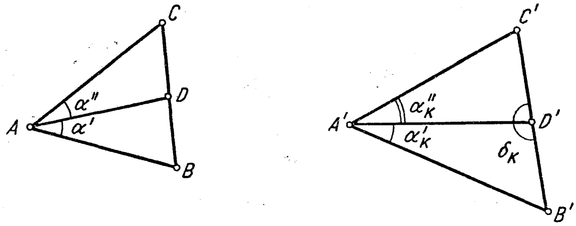

Abb. 13

Das bedeutet: es ist erstens $AD = A'D'$ mit einem solchen Punkt D' auf $B'C'$, für den $B'D' = BD$ ist, und es ist zweitens der Winkel des Sektors zwischen AB und AD gleich dem Winkel zwischen $A'B'$ und $A'D'$. Da der Punkt D willkürlich ist, bedeutet dies, daß bei der Standardabbildung des Dreiecks T^K auf T

$$AX = A'X'$$

und der Winkel (AB, AX) gleich dem Winkel $(A'B', A'X')$ ist.

Es seien jetzt P, Q zwei beliebige Punkte des Dreiecks T, die auf gewissen Kürzesten $AX, AY(X, Y \in BC)$ liegen. P', Q', X', Y' seien die entsprechenden Punkte im T^K. Nach dem Bewiesenen haben die Dreiecke AXY und $A'X'Y'$ gleiche Seiten und Winkel in den Ecken A, A'. Daher folgt aus Satz 2, § 3, daß $PQ = P'Q'$. Folglich ist das Dreieck T isometrisch zum Dreieck T^K (im Sinne der Metrik im Gebiet R_K und daher natürlich auch im Sinne der gesamten inneren Metrik).

7. Satz 7. *O sei ein Punkt in einem R_K und L, M seien zwei von diesem Punkt ausgehende Kürzeste. Ist der Winkel zwischen ihnen $\alpha(LM) < \pi$, so existieren solche sie verbindende Kegel von Kürzesten, deren Winkel beliebig nahe an $\alpha(L, M)$ herankommen. Besitzt außerdem der Punkt O eine der Kugel homöomorphe Umgebung, so existiert zwischen den Kürzesten L, M ein Kegel der von O austretenden Kürzesten, dessen Winkel gleich $\alpha(L, M)$ ist.*

Beweis. Es seien X und Y Punkte auf L und M. Wenn $\alpha(L, M) < \pi$, so geht die Kürzeste XY — sobald X, Y hinreichend nahe bei O liegen — nicht durch O und liegt demnach nicht gänzlich auf $L + M$. Daher bilden die Kürzesten OZ, die von O zu den Punkten $Z \in XY$ gehen, einen Kegel C_{XY} zwischen L und M; diese sind es auch, die das auf OXY von der Spitze O aus aufgespannte Flächendreieck erzeugen.

Nach Satz 6 genügt der Winkel $\beta(C_{XY})$ des Kegels C_{XY} (des Flächendreiecks) der Ungleichung

$$\beta(C_{XY}) \leq \gamma(X, Y)\,.$$

Gleichzeitig ist offenbar

$$\beta(C_{XY}) \geq \alpha(L, M)\,,$$

und nach Definition

$$\alpha(L, M) = \lim_{X, Y \to O} \gamma(X, Y)\,.$$

Daraus folgt

$$\alpha(L, M) = \lim_{X, Y \to O} \beta(C_{XY})\,,$$

wodurch nun die erste Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Hat O eine kugelhomöomorphe Umgebung, so läßt sich erstens jede von O ausgehende Kürzeste mindestens bis zur Länge eines gewissen $r > 0$ fortsetzen, so daß die Auffassung richtig ist, die Kegel C_{XY} seien bis zu einer solchen Länge fortgesetzt, und zweitens kann man dann aus diesen Kegeln eine konvergierende Folge auswählen. Der Grenzkegel hat nun einen Winkel, der gleich $\alpha(L, M)$ ist.

8. Der Satz 6 gestattet auch den Beweis der folgenden Behauptung:

Satz 8. *Hat der Punkt O in einem R_K eine der n-dimensionalen Kugel homöomorphe Umgebung, die so beschaffen ist, daß der Exzeß jedes in ihr enthaltenen Dreiecks (bezüglich K) Null ist, so ist die Umgebung des Punktes O isometrisch zu einem Gebiet eines n-dimensionalen Raumes konstanter Krümmung.*

Beweis. Der Punkt O möge eine Umgebung U haben, die den Bedingungen des Satzes genügt. Es darf natürlich $n \geq 2$ vorausgesetzt werden. Nach Satz 6 ist jedes beliebige Flächendreieck in U isometrisch zu einem ebenen Dreieck, d. h. zu einem Dreieck in der K-Ebene. Diese Bemerkung bildet nun die Grundlage des Beweises.

Ferner läßt sich nach Satz 7, § 3 jede von O ausgehende Kürzeste über den Punkt O hinaus fortsetzen. Diese Fortsetzung ist eindeutig, da man andernfalls ein Dreieck mit zwei teilweise nicht aufeinander liegenden Seiten erhalten könnte; ein solches Dreieck wäre aber mit dem ebenen Dreieck bestimmt nicht isometrisch.

L_1, L_2 seien zwei von O ausgehende, einander nicht fortsetzende Kürzeste und L_1', L_2' ihre Fortsetzungen über O hinaus. Dann ist jeder der vier Winkel zwischen L_1 und L_2, L_1' und L_2' usw. kleiner als π. Wäre nämlich z. B. der Winkel zwischen L_1 und L_2' gleich π, so wäre L_1, wie leicht ersichtlich, die Fortsetzung von L_2, so daß die Fortsetzung von L_2 nicht eindeutig wäre. Indem wir auf den Kürzesten L_1, L_2, L_1', L_2' die Punkte A_1, A_2, A_1', A_2' annehmen, konstruieren wir die vier Flächendreiecke OA_1A_2, OA_2A_1' usw. (Abb. 14). Nach dem Bewiesenen sind ihre Winkel im Punkte 0 kleiner als π, so daß keiner von ihnen ausartet, und auf Grund des Satzes 6 ist jeder von ihnen isometrisch zum ebenen Dreieck. Ferner ersieht man leicht aus der oben erwähnten eindeutigen Fortsetzbarkeit der Kürzesten, daß die Summe eines beliebigen Paares von Nebenwinkeln dieser Dreiecke beim Punkt O gleich π ist.

Aus all dem folgt, daß die konstruierten Dreiecke eine Fläche Q^2 bilden, die zum Viereck auf der K-Ebene isometrisch ist.

Hat die Umgebung U des Punktes O die Dimensionszahl $n = 2$, so bildet eben die Fläche Q^2 die Umgebung U des Punktes O (da die Umgebung von O gemäß Voraussetzung homöomorph zur Kugel, d. h. für $n = 2$ zum Kreise ist). Ist dagegen $n > 2$, so daß Q^2 nicht die Umgebung U des Punktes O bildet, so läßt sich aus O eine Kürzeste L_3 ziehen, die außerhalb der Fläche Q^2 verläuft. Sei L_3' die Fortsetzung dieser Kürzesten über den Punkt O hinaus. Wir nehmen auf L_3 und L_3' die Punkte A_3, A_3' an. Die Kürzesten L_1, L_2, L_3 bilden gemeinsam mit

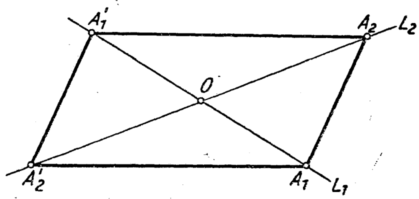

Abb. 14

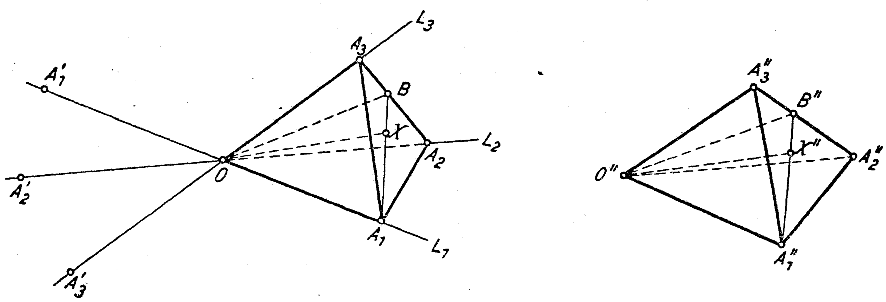

Abb. 15

ihren Fortsetzungen eine Art Koordinatendreibein mit dem Ursprung O (Abb. 15). Auf ihnen haben wir die Punkte A_1, A_2, A_3 usw. Wir konstruieren jetzt die Tetraeder mit der gemeinsamen Ecke O und mit den Ecken in diesen Punkten A_1 usw.

Betrachten wir etwa die Punkte A_1, A_2, A_3. Wir konstruieren das Flächendreieck $A_1A_2A_3$; es ist zum Dreieck auf der K-Ebene isometrisch und ergibt sich, unabhängig, von welcher Ecke es aufgespannt wird, als ein und dasselbe. Wenn wir vom Punkte O aus die Kürzesten nach allen Punkten dieses Dreiecks $A_1A_2A_3$ ziehen, bekommen wir das Tetraeder $T = OA_1A_2A_3$, das isometrisch zum Tetraeder im Raum konstanter Krümmung K ist.

Um dies zu zeigen, konstruieren wir im Raum konstanter Krümmung das Tetraeder $T^K = O''A_1''A_2''A_3''$ mit gleichlangen Kanten. Dann sind seine Seitenflächen isometrisch zu denen des Tetraeders T. Die Isometrie der Basen $A_1A_2A_3$ und $A_1''A_2''A_3''$ stellt die Zuordnung zwischen den Kürzesten OX und $O''X''$ her, die aus den Ecken O und O'' in die entsprechenden Punkte dieser Basen verlaufen. Wir wollen zeigen, daß diese Kürzesten ebenfalls gleich sind, d. h., daß $OX = O''X''$ (Abb. 15).

Hierzu legen wir durch $O''X''$ und $O''A_1''$ eine Ebene; sie schneidet das Tetraeder T^K in einem gewissen Dreieck $O''A_1''B''$. Infolge der Isometrie der Seitenflächen der Tetraeder T und T^K entspricht diesem Dreieck das Dreieck OA_1B mit gleichlangen Seiten. Folglich ist das Flächendreieck OA_1B isometrisch zu $O''A_1''B''$, woraus man bereits ersieht, daß $OX = O''X''$.

Demnach werden die Tetraeder T und T^K aus gleichlangen Strecken OX und $O''X''$ gebildet, die zu den entsprechenden Punkten der isometrischen Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $A_1''A_2''A_3''$ weiterführen. Daraus ersieht man, daß diese Tetraeder isometrisch sind.

Unsere Diskussion hinsichtlich des Tetraeders $T = OA_1A_2A_3$ läßt sich auf alle acht Tetraeder $OA_1A_2A_3$, $OA_1'A_2'A_3'$ usw. anwenden. Daher stellt sich heraus, daß der Punkt O von acht Tetraedern umgeben ist, die zu den Tetraedern im Raum von konstanter Krümmung K isometrisch sind. Ferner kann man sich unschwer davon überzeugen, daß diese Tetraeder gemeinsam die Figur Q^3 bilden, die zum Oktaeder im Raum von konstanter Krümmung K isometrisch ist.

Ist die Dimensionszahl der Umgebung U des Punktes O $n = 3$, so bildet gerade das Oktaeder Q^3 die Umgebung U dieses Punktes. Ist dagegen $n > 3$, so ziehen wir aus dem Punkt O die Kürzeste L_4, die außerhalb Q^3 verläuft; wir nehmen ihre Fortsetzung L_4'; auf L_4 und L_4' nehmen wir die Punkte A_4 und A_4' und erhalten wiederum eine Art Koordinatenvierbein, gebildet aus den Kürzesten $L_1, \cdots, L_4$ und ihren Fortsetzungen. Nun betrachten wir die Simplices $OA_1A_2A_3A_4$ usw. — es gibt deren insgesamt 16 — und beweisen ähnlich dem Vorhergehenden, daß sie isometrisch zu den Simplices im Raum konstanter Krümmung K sind (dabei wird natürlich zuerst festgestellt, daß dies für die Basen $A_1A_2A_3A_4$ usw. gültig ist).

Indem wir diese Konstruktion bis zur Ausschöpfung der Umgebung U des Punktes O fortführen, überzeugen wir uns davon, daß U isometrisch zu einem Gebiet des n-dimensionalen Raumes von konstanter Krümmung K ist.

§ 5. Flächeninhalt und isoperimetrische Ungleichung in einem R_K

1. Definition des Flächeninhalts. Wir betrachten in einem metrischen Raum die Fläche F, die durch die stetige Abbildung f eines gewissen ebenen Jordanschen Gebietes D gegeben ist. M sei ein trianguliertes Vieleck oder, wenn man will, ein Komplex von Dreiecken, die in D enthalten sind. Wir nehmen irgendein Dreieck T_i des Komplexes M an. Seinen Ecken A, B, C entsprechen die Punkte $f(A), f(B), f(C)$ auf der Fläche F. Wir konstruieren das ebene Dreieck T_i^0 mit Seiten, die den Abständen zwischen den Punkten $f(A), f(B), f(C)$ gleich sind. $S(T_i^0)$ sei der Flächeninhalt dieses ebenen Dreiecks.

Wir bilden die Summe der Flächeninhalte $S(T_i^0)$ aller Dreiecke T_i^0, die den Dreiecken T_i entsprechen;

$$S_0(M) = \sum_i S(T_i^0).$$

Den Inhalt der Fläche, die durch die Abbildung f des Gebietes D gegeben ist, definieren wir als den unteren Grenzwert der Größen $S_0(M)$ unter der Bedingung, daß sich die Ecken der Komplexe M unbegrenzt in D verdichten und die Vielecke M allmählich das gesamte Innere des Gebietes D ausschöpfen

$$S(F, D, f) = \underline{\lim}\, S_0(M)\,.$$

Ein und dieselbe Fläche F kann man durch verschiedene Abbildungen f verschiedener Gebiete D vorgeben; um aber die Frage der Abhängigkeit des Flächeninhalts von der Wahl der Flächendarstellung auszuschalten, genügt es, den Inhalt der Fläche F durch die Formel zu definieren:

$$S(F) = \inf S(F, D, f)\,,$$

d.h. als die untere Grenze der Größen $S(F, D, f)$ für alle Abbildungen f von Gebieten D, die ein und dieselbe Fläche bestimmen.

Die angegebene Definition ist vollkommen analog der Definition für den Flächeninhalt als unterer Grenzwert von Flächeninhalten einbeschriebener Polyeder.

In der vorliegenden Definition gingen wir von ebenen Dreiecken T_i^0 aus; man kann auch von Dreiecken T_i^K in einer beliebigen gegebenen K-Ebene ausgehen. Streben nämlich die Seiten der Dreiecke T_i^0 gegen Null, so streben die Verhältnisse der Flächeninhalte der Dreiecke T_i^0 und T_i^K mit gleichen Seiten gegen Eins, und daher ist

$$\underline{\lim} \sum S(T_i^0) = \underline{\lim} \sum S(T_i^K)\,.$$

Diese Bemerkung ist sehr nützlich bei der Untersuchung des Inhalts einer Fläche in einem R_K; sie gestattet es, auch in diesem Fall Dreiecke auf der K-Ebene zu benutzen.

Mit dem Komplex M, der in der Definition für den Inhalt einer Fläche F auftritt, wird man zweckmäßig die folgende Konstruktion verbinden:

Jedem Dreieck $T_i = ABC$ des Komplexes M entspricht das Dreieck T_i^K mit Seiten, die gleich $\varrho(f(A), f(B))$ usw. sind. Diese Dreiecke T_i^K bilden natürlich einen Komplex, der dem Komplex M isomorph ist. Dieser Komplex P^K, auch *Abwicklung* genannt, ist das Analogon zu dem der Fläche F einbeschriebenen Polyeder, jedoch nur vom Standpunkt seiner inneren Geometrie aufgefaßt. Man kann sagen, daß der Komplex M die Abwicklung P^K oder das (*abstrakte*) Polyeder P^K bestimmt, das der Fläche F einbeschrieben ist.

Die Größe $S_K(M) \sum S(T_i^K)$ ist nichts anderes als der Flächeninhalt der Abwicklung P^K, so daß der Inhalt der Fläche bei uns gerade mit Hilfe der *abstrakten einbeschriebenen Polyeder* P^K definiert wird.

2. Satz 1. *Der Inhalt des Flächendreiecks T in einem R_K ist stets höchstens gleich dem des entsprechenden Dreiecks T^K auf der K-Ebene und ist ihm nur dann gleich, wenn das Dreieck T zu T^K isometrisch ist.*

Zum Beweis dieses Satzes werden wir das folgende Lemma benötigen (das nichts anderes darstellt als den einfachsten Spezialfall des Satzes 1).

Lemma. *Das Vieleck P sei auf der K-Ebene durch drei konvexe Polygone $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ berandet, die mit der Wölbung ins Innere des Vielecks gewandt sind; es wird nicht ausgeschlossen, daß einer oder zwei von ihnen zu einer Strecke werden (Abb. 16). Dann hat das Dreieck T, das sich aus P durch Geradebiegen dieser Polygone ergibt, dessen Seiten also die gleiche Länge wie die Polygone $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ haben, einen größeren Flächeninhalt als P.* Da jedes der Polygone $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ konvex ist und seine Wölbung den beiden anderen zuwendet, ist jedes kürzer als die Summe der beiden anderen. D. h., die Längen der Polygone genügen der Dreiecksungleichung, so daß das Dreieck T existiert.

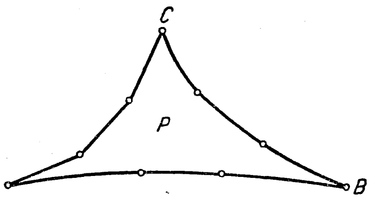

Abb. 16

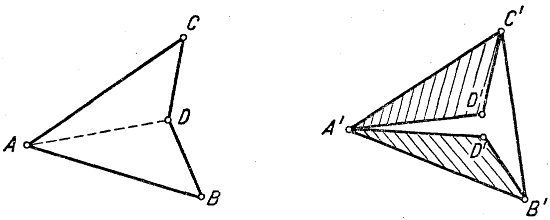

Abb. 17

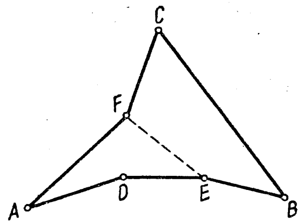

Abb. 18

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, für den das Vieleck P nur noch eine Ecke D neben A, B, C besitzt, so daß man zu einem Viereck $ABDC$ gelangt. Wir zerschneiden dieses in die Dreiecke ABD, ACD. Bei der Verwandlung des Vierecks $ABDC$ in das Dreieck T durch Geradebiegen des Polygons BDC vergrößern sich die Winkel bei B, C, A nach Lemma 2, § 3. Legt man daher das Dreieck ABD so auf T, daß die Seite AB auf die entsprechende Seite des Dreiecks T fällt, und analog das Dreieck ACD, so werden sich beide Dreiecke im Inneren von T befinden und sich nicht überdecken (Abb. 17). Daher ist der Flächeninhalt des Vierecks P kleiner als der des Dreiecks T.

Jetzt wird für den allgemeinen Fall mehrerer Ecken D_i das Lemma durch Induktion bezüglich der Zahl dieser Ecken bewiesen. Und zwar schneiden wir, wenn das Vieleck P mehr als vier Spitzen hat, von ihm ein Viereck, etwa $ADEF$, ab (Abb. 18), indem wir eine geeignete Diagonale ziehen. Durch Geradebiegen des Polygons ADE vermindern wir die Anzahl der Ecken um eine, nämlich D, und vergrößern den Flächeninhalt des Vielecks P, da das Viereck $ADEF$ durch ein größeres Dreieck ersetzt wird. Da dabei der Winkel bei E nur größer wird nach Lemma 2, § 3), so wird das Polygon $\overset{\frown}{AB}$ wieder konvex in Richtung der

Ecke C sein. Folglich erhalten wir ein Vieleck mit denselben Eigenschaften, aber mit einer geringeren Eckenzahl; das Lemma ist also bewiesen.

3. Beweis des Satzes 1. T sei ein Flächendreieck in einem R_K, das auf ABC aus der Ecke A aufgespannt wird. T^K sei das ihm entsprechende Dreieck in der K-Ebene. Auf BC nehmen wir sukzessiv die Punkte $B = D_0, D_1, \cdots, D_n, D_{n+1} = C$ an und zerschneiden das Dreieck T in die „schmalen" Dreiecke $T^i = AD_iD_{i+1}$, indem wir die Kürzesten AD_i ziehen. Jedem schmalen Dreieck T_i ordnen wir das entsprechende Dreieck T_i^K auf der K-Ebene zu. Aus diesen Dreiecken wird das Vieleck Q gebildet das durch die Strecken $A'B', A'C'$ und das Polygon $B'D_1' \cdots D_n'\ C'$ berandet ist.

Das Polygon $B'D_1' \cdots D_n'\ C'$ ist konvex und mit seiner Wölbung ins Innere des Vielecks Q gerichtet. Denn nach dem Satz über die Nebenwinkel ist die Winkelsumme der schmalen Dreiecke T_{i-1}, T_i in der gemeinsamen Ecke mindestens π, und beim Übergang zu den Dreiecken T_{i-1}^K, T_i^K können sich die Winkel nur vergrößern. Daher sind die Winkel des Vielecks Q in den Ecken D_i' mindestens π, d. h. das Polygon $\widetilde{B'C'}$ ist mit seiner Wölbung ins Innere von Q gewandt.

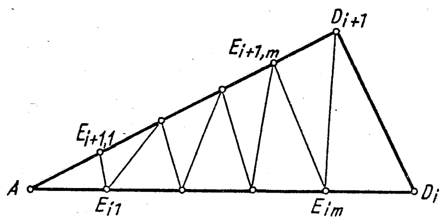

Abb. 19

Folglich läßt sich auf das Vieleck Q das oben bewiesene Lemma anwenden; aus ihm folgt die Beziehung für die Flächeninhalte

$$\text{Inh. } Q = \text{Inh. } \sum T_i^K \leq \text{Inh. } T^K. \tag{1}$$

Dabei steht hier das Gleichheitszeichen nur dann, wenn das Vieleck Q mit dem Dreieck T^K zusammenfällt.

Jetzt nehmen wir auf den Kürzesten AD_i die Punkte E_{ij} an ($j = 1, \cdots, m$; dasselbe m für alle i). Diese Punkte auf den Seiten jedes „schmalen" Dreiecks T_i lassen sich durch Kürzeste verbinden (Abb. 19). Als Ergebnis erhalten wir die „kleinen" Dreiecke T_{ik}, beginnend mit dem bei der Ecke A anliegenden und endend mit an der Seite BC anliegenden Dreiecken.

Indem wir jedem kleinen Dreieck T_{ik} das entsprechende Dreieck auf der K-Ebene zuordnen, konstruieren wir das der Fläche T einbeschriebene abstrakte Polyeder P, wie im Punkt 1. beschrieben wurde.

Das Polyeder P setzt sich aus den „schmalen Vielecken" P_i zusammen, die den schmalen Dreiecken entsprechen. Den Kürzesten AD_{i-1}, AD_i entsprechen dabei die Polygone $\widetilde{AD}_{i-1}, \widetilde{AD}_i$, die gemeinsam mit der Strecke $\overline{D_{i-1}D_i}$ das Vieleck P_i beranden. Das „schmale Vieleck" P_i setzt sich aus den Dreiecken zusammen, die den kleinen Dreiecken T_{ik} entsprechen. Nach dem Satz über die

Nebenwinkel (Satz 2, § 2) ist die Winkelsumme dieser in einer Spitze E_{ij} zusammentreffenden Dreiecke T_{ik} mindestens π. Beim Übergang zu den entsprechenden Dreiecken in der K-Ebene nehmen die Winkel nicht ab, und folglich ist ihre Summe bei jeder Ecke $\geq \pi$. Das bedeutet, daß die Polygone $\widehat{AD_{i-1}}$, $\widehat{AD_i}$ mit der Wölbung ins Innere des Vielecks P_i weisen. Daher ist nach dem bewiesenen Lemma der Flächeninhalt des schmalen Vielecks P_i höchstens gleich dem des entsprechenden Dreiecks.

Dieses Dreieck ist gleichzeitig nichts anderes als das Dreieck T_i^K, das dem „schmalen" Dreieck T_i entspricht. Demnach ist

$$\text{Inh. } P_i \leq \text{Inh. } T_i^K , \tag{2}$$

und das Gleichheitszeichen steht hier nur, wenn das Vieleck P_i zu einem Dreieck T_i^K wird.

Durch Summation der Ungleichungen (2) erhalten wir für den Flächeninhalt des gesamten abstrakten einbeschriebenen Polyeders P die Ungleichung

$$\text{Inh. } P \leq \text{Inh. } \sum T_i^K ,$$

und auf Grund von (1)

$$\text{Inh. } P \leq \text{Inh. } T^K . \tag{3}$$

Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks T gemäß Definition die untere Grenze der Flächeninhalte der einbeschriebenen Polyeder, und daher folgt aus (3), daß

$$\text{Inh. } T \leq \text{Inh. } T^K . \tag{4}$$

Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

4. Es verbleibt zu zeigen, daß in (4) die Gleichheit nur bei der Isometrie der Dreiecke T und T^K stattfindet. Hierzu zeigen wir, daß das Gleichheitszeichen in (4) nur dann gelten kann, wenn es in (1) und (2) steht.

Zum Beweis wählen wir etwa auf der Seite AD des schmalen Dreiecks T_i noch einen Punkt F zwischen den Punkten E_{ij}, E_{ij+1}. Beim Aufbau des schmalen Vielecks P_i erscheint dann an Stelle des Dreiecks, das dem kleinen Dreieck mit der Seite $E_{ij}\,E_{ij+1}$ entspricht, ein Viereck mit den Seiten, die gleich $E_{ij}F$ und FE_{ij+1} sind, und mit dem Winkel $\geq \pi$ bei der Ecke F. Beim Biegen des Vierecks zu einem Dreieck vergrößert sich der Flächeninhalt.

Aus dieser Bemerkung folgt, daß die Einführung neuer Ecken auf den Kürzesten AD_i und — aus ganz demselben Grunde — die Einführung neuer Ecken D auf der Seite BD den Flächeninhalt des entsprechenden einbeschriebenen Polyeders P nur verkleinern kann. Daraus folgt, daß der untere Grenzwert der Flächeninhalte der Polyeder P höchstens gleich dem Flächeninhalt dieser Polyeder selbst ist, d. h.

$$\text{Inh. } T \leq \text{Inh. } P.$$

Verbinden wir das mit der Ungleichung (3), so erhalten wir

$$\text{Inh. } T \leq \text{Inh. } P \leq \text{Inh. } T^K ,$$

und folglich ist, wenn $\text{Inh. } T = \text{Inh. } T^K$,

$$\text{Inh. } P = \text{Inh. } T^K .$$

D. h., für Inh. $T =$ Inh. T^K gilt in der Formel (3) ebenfalls das Gleichheitszeichen; dann gilt dies aber auch in den Formeln (2) und (1); in diesen letzten gilt aber das Gleichheitszeichen, wie bereits erwähnt wurde, nur dann, wenn jedes schmale Vieleck Q_i zum Dreieck T_i^K, das Vieleck $Q = \sum\limits_i T_i^K$ zum Dreieck T^K wird.

Wie sich aus den vorstehenden Überlegungen ergibt, muß dies für beliebig gewählte Punkte D_i auf der Seite BC und für beliebig gewählte Punkte E_{ij} auf den Kürzesten AD_i stattfinden.

Jetzt nehmen wir zwei beliebige Punkte X_1, X_2 im Dreieck T, die auf den Kürzesten AD_1, $AD_2 (D_1, D_2 \in BC)$ liegen mögen. Diese Kürzesten teilen das Dreieck T in zwei „schmale" Dreiecke, die ihrerseits in kleine Dreiecke mit den Ecken X_1, X_2 zerlegt werden (Abb. 20).

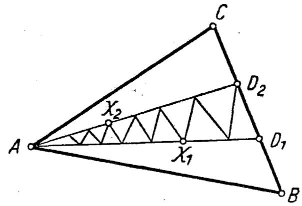

Abb. 20

Es mögen die entsprechenden schmalen Vielecke Q_i zu den Dreiecken T_i^K und das aus ihnen zusammengesetzte Vieleck Q zum Dreieck T^K werden.

Das bedeutet folgendes: Erstens — wenn die Punkte D_1', D_2' auf der Seite $B'C'$ des Dreiecks T^K den Punkten D_1, D_2 (d. h. $B'D_i' = BD_i$) entsprechen, so ist

$$A'D_1' = AD_1, \qquad A'D_2' = AD_2.$$

Zweitens — wenn die Punkte X_1', X_2' auf den Strecken $A'D_i'$ den Punkten X_1, X_2 (d. h. $A'X_i' = AX_i$) entsprechen, so ist

$$X_1' X_2' = X_1 X_2 .$$

Aber diese letzte Gleichung bedeutet gerade wegen der willkürlichen Lage der Punkte X_1, X_2, daß die Zuordnung zwischen den Dreiecken T und T^K isometrisch ist, w. z. b. w.

5. Aus dem Satz 1 kann man leicht folgende Verallgemeinerung desselben ableiten:

Satz 2. *L sei ein geschlossenes Polygon in einem R_K und P ein „von ihm aufgespanntes Vieleck", d. h. eine Fläche, die von Kürzesten gebildet wird, indem diese von irgendeiner Ecke A auf L nach allen Punkten des Polygons gezogen werden. Der Flächeninhalt des Vielecks P ist höchstens gleich dem eines Vielecks P^K mit gleich langen Seiten in einer K-Ebene; dabei ist P^K einer Kurve konstanter Krümmung einbeschrieben; P hat denselben Flächeninhalt wie dieses Vieleck P^K nur dann, wenn beide Vielecke isometrisch sind.* (Man kann auch das Vieleck P betrachten, das durch Kürzeste gebildet wird, die nicht von einer Ecke des Polygons L, sondern von verschiedenen Ecken ausgehen. Hat z. B. das Polygon die sukzessiven Ecken A, B, C, D, so kann man aus A die Kürzesten nach allen Punkten der Strecke BC ziehen und aus C nach allen Punkten der Strecke AD.)

Beweis. Wir zerschneiden das Vieleck P in Dreiecke durch Diagonalen, d. h. durch Kürzeste die von A nach den anderen Ecken gehen. Ersetzt man jedes solche Dreieck T_i durch das entsprechende Dreieck T_i^K auf der K-Ebene und legt sie aneinander, wie das die T_i tun, so ergibt sich das Vieleck $Q = \sum T_i^K$.

Da nach Satz 1: Inh. $T_i \leq$ Inh. T_i^K, so ist Inh. $P \leq$ Inh. Q. Das Gleichheitszeichen steht hier nur dann, wenn alle Dreiecke T_i isometrisch zu den entsprechenden Dreiecken T_i^K sind, d. h. wenn das Vieleck P isometrisch zu Q ist.

Da in der K-Ebene unter den Vielecken mit gegebenen Seiten das Vieleck P^K, das einer Kurve konstanter Krümmung einbeschrieben ist, den größten Flächeninhalt hat, übertrifft der Flächeninhalt von P den von P^K nicht; die beiden Inhalte sind nur bei der Isometrie von P und P^K gleich.

Einen Spezialfall des Satzes 2 ergeben die Vielecke auf Flächen mit der Krümmung $\leq K$ und speziell die Vielecke auf Polyedern (Abwicklungen), die aus Stücken der K-Ebene gebildet sind und in allen Ecken eine negative Krümmung haben; das sind (innere) Ecken mit einem vollen Winkel $\Theta > 2\pi$.

6. Satz 3. *In einem R_K kann man mit einer rektifizierbaren Kurve eine Fläche aufspannen, deren Flächeninhalt höchstens gleich dem eines Kreises C in der K-Ebene mit demselben Umfang wie die Länge der Kurve ist.* Nimmt man nämlich auf einer gegebenen Kurve L einen beliebigen Punkt O an und verbindet ihn durch Kürzeste mit allen übrigen Punkten der Kurve, so ergibt sich eine Fläche F, deren Inhalt kleiner ist als der des Kreises C mit Ausnahme des Falles, für den F zu diesem Kreis isometrisch ist. (Ist $K > 0$, so darf die Länge l der Kurve höchstens $2\pi/\sqrt{K}$ sein, da andernfalls der Kreis C nicht existiert.)

Wir beweisen hier nur den ersten Teil des Satzes, d. h., daß der Inhalt der Fläche F höchstens gleich dem des Kreises C ist. Eine Diskussion, die nicht so elementar ist, wird nötig, wenn die Flächeninhalte gleich sind; wir werden diesen Fall hier nicht betrachten.

Beweis (A). Zuerst bemerken wir, daß man aus der stetigen Abhängigkeit einer Kürzesten OX von der Lage ihres Endpunktes X auf der Kurve L leicht schließen kann, daß F sich durch stetige Abbildung des Kreises darstellen läßt, so daß F in diesem Sinne tatsächlich eine Fläche ist. Nun konstruieren wir ein abstraktes Polyeder P, das der Fläche F einbeschrieben ist. (Die Konstruktion dieses Polyeders beschreiben wir der Einfachheit halber ohne Zuhilfenahme einer Triangulation des ebenen Kreises, durch dessen Abbildung F dargestellt ist, vielmehr dadurch, daß wir unmittelbar die Fläche F selbst betrachten.) Wir wählen auf der Kurve L neben dem Punkt A noch einige Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und auf jeder der Kürzesten AA_i noch einige Punkte $B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{im_i}$. Danach betrachten wir Dreiecke mit ihren Ecken auf benachbarten Kürzesten AA_i, AA_{i+1}. Diesen Dreiecken werden Dreiecke mit gleich langen Seiten auf der K-Ebene zugeordnet, aus denen man nun die Abwicklung oder das abstrakte, einbeschriebene Polyeder P bildet.

Das Polyeder P ist durch ein geschlossenes Polygon berandet, das höchstens so lang wie die Kurve L ist; die Länge des Polygons nähert sich jedoch beliebig nahe der Länge von L, sofern die Punkte A_i auf L hinreichend dicht gewählt werden.

(B). Wir zeigen, daß die Krümmung in allen inneren Ecken der Abwicklung P^K nichtpositiv ist, d. h., daß der volle Winkel mindestens 2π beträgt.

Jede innere Ecke D entspricht irgend einem Punkt B_{ij} auf einer gewissen Kürzesten AA_i. Die in dieser Ecke D konvergierenden Dreiecke $T_1^K, \cdots, T_p^K$ entsprechen den Dreiecken $T_1, \ldots, T_p$, die im Punkte B_{ij} konvergieren. Nach Satz 4, § 3 sind die Winkel der Dreiecke T_l^K mindestens gleich denen der Dreiecke T_l:

$$\alpha_l^K \geq \alpha_l ,$$

und folglich erhalten wir für den vollen Winkel Θ um den Punkt B

$$\Theta(B) = \sum_l \alpha_l^K \geq \sum \alpha_l . \tag{5}$$

Da der Punkt B_{ij} innerhalb der Kürzesten AA_i liegt, zerfallen die Dreiecke $T_1, \cdots, T_p$ in zwei Teile: die Ecken der einen Teildreiecke liegen auf der einen Kürzesten AA_{i-1}, die zu AA_i benachbart ist, die Ecken der anderen Dreiecke liegen auf der anderen Kürzesten AA_{i+1}. Die Winkel der Dreiecke der einen Gruppe, die im Punkte B_{ij} zusammentreffen, sind nach Satz 1, § 2 mindestens gleich dem Winkel zwischen den von B_{ij} ausgehenden Ästen der Kürzesten AA_i, d. h. mindestens π.

Daher ist ihre Gesamtsumme mindestens 2π, d. h.

$$\sum_l \alpha_l \geq 2\pi .$$

Nach (5) folgt aber hieraus, daß

$$\Theta(B) \geq 2\pi .$$

(C). Da die Krümmung in jeder Ecke der Abwicklung P nichtpositiv ist, läßt sich auf P der Satz 2, genauer gesagt, seine am Schluß des Punktes 5. erwähnten Folgerungen, anwenden. Daher ist der Flächeninhalt von P höchstens gleich dem eines gewissen Vielecks P^K auf der K-Ebene mit Seiten von derselben Länge:

$$\text{Inh. } P \leq \text{Inh. } P^K.$$

Bestimmt aber ist der Flächeninhalt von P^K kleiner als der des Kreises C' vom selben Umfang und damit auch kleiner als der Inhalt des Kreises C mit einem Umfang, der gleich der Länge der Ausgangskurve L ist (da die Länge von L mindestens gleich dem Umfang des Vielecks P ist). Demnach gilt

$$\text{Inh. } P \leq \text{Inh. } C$$

Da aber nach der Definition des Inhalts einer Fläche

$$\text{Inh. } F \leq \underline{\lim} \text{ Inh. } P$$

ist, so folgt daraus

$$\text{Inh. } F \leq \text{Inh. } C$$

w. z. b. w.

§ 6. Ergänzungen zu den vorhergehenden Ergebnissen

1. Der Winkel im starken Sinne. In diesem Paragraphen legen wir, meistenteils ohne Beweise, einige Resultate über die Gebiete R_K dar, die in vielem die Ergebnisse der §§ 3—5 ergänzen. Eine wichtige Rolle spielt bei einer Reihe dieser Schlußfolgerungen der folgende Satz, der den Satz 3, § 3 über die Existenz des Winkels zwischen Kürzesten verschärft.

Satz 1. *In einem R_K existiert zwischen zwei beliebigen, von einem Punkte ausgehenden Kürzesten ein „Winkel in starkem Sinne", d. h. es existiert nicht nur* $\alpha = \lim\limits_{x, y \to 0} \gamma(x, y)$, *sondern auch*

$$\alpha = \lim_{x \to 0} \gamma(x, y) = \lim_{y \to 0} \gamma(x, y) . \tag{1}$$

D. h., es existiert der Grenzwert des Winkels $\gamma(x, y)$, unter der einzigen Bedingung, daß x (oder y) gegen Null strebt, während sich y (oder x) vollkommen willkürlich ändert [12]).

Beweis. Wir wollen z. B. beweisen, daß $\lim\limits_{x \to 0} \gamma(x, y)$ existiert und gleich α ist. Wir verwenden Satz 3, § 2. Nach diesem Satz gilt für den oberen Winkel α die Gleichung

$$\alpha = \sup \lim_{x \to 0} \gamma(x, y) . \tag{2}$$

Im vorliegenden Fall existiert, wie bewiesen (Satz 3, § 3), sogar ein Winkel, und daher bezeichnet α diesen Winkel $\alpha = \lim\limits_{x, y \to 0} \gamma(x, y)$.

Andererseits ist nach Satz 4, § 3 für beliebige x und y

$$\alpha \leq \gamma(x, y) ,$$

so daß

$$\alpha \leq \inf \lim_{x \to 0} \gamma(x, y) . \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt, daß $\lim\limits_{x \to 0} \gamma(x, y)$ existiert und gleich α ist.

Satz 2. *In einem R_K sei der Punkt A und die Kürzeste OB gegeben. X sei ein Punkt auf OB und $x = OX$, $z(x) = AX$; ξ sei der Winkel zwischen OX und AX. Dann existiert die linke Ableitung von z nach x, und sie lautet*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_l = \cos \xi .$$

Dieser Satz wird aus Satz 1 ganz analog abgeleitet wie im § 2 die schwächere Behauptung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{u.\,l} \geq \cos \xi .$$

Satz 1 läßt sich auf den Fall eines Winkels zwischen einer Kürzesten und einer Kurve verallgemeinern. Dementsprechend kann Satz 2 auf den Fall ausgedehnt werden, daß an Stelle der Kürzesten OB eine Kurve tritt, die entsprechenden

[12]) Der Begriff des Winkels in starkem Sinne ist früher in [1] erklärt worden und spielt dort eine wichtige Rolle; der dort erwähnte Begriff stimmt für ein Gebiet R_K mit dem der Definition (1) in [1] überein.

Bedingungen unterliegt. Diese Sätze gestatten verschiedenartige Anwendungen, die vor allem den Abstand eines Punktes von einer Kürzesten oder von einer Kurve betreffen.

2. Räume mit der Krümmung $\geq K'$. Satz 1 ist im weiteren insofern wichtig, als für den Fall, daß die Winkel in starkem Sinne existieren, eine Abschätzung für die Dreieckswinkel möglich wird; diese steht gleichsam in Dualität zu jener, die in dem in § 3 bewiesenen Satz angegeben ist. Es gilt nämlich

Satz 3. *ABC sei ein Dreieck in einem gewissen metrischen Raum; zwei beliebige Punkte auf den Seiten von ABC sollen sich durch eine eindeutige Kürzeste verbinden lassen, wobei zwischen dieser Kürzesten und den entsprechenden Seitenabschnitten ein Winkel in starkem Sinne existiert. Ferner sei K' eine beliebige Zahl und $\mu_{K'}$ die untere Grenze der relativen Exzesse (bzgl. K'), welche die Dreiecke AXY mit ihren Ecken X, Y auf den Seiten AB, AC des Dreiecks ABC besitzen.*

Unter diesen Bedingungen gilt für den Winkel α in der Ecke A des Dreiecks ABC und für den entsprechenden Winkel α_K eines Dreiecks mit gleichen Seitenlängen auf der K'-Ebene die Ungleichung

$$\alpha - \alpha_{K'} \geq \mu_{K'}.$$

Der Beweis dieses Satzes ähnelt dem des entsprechenden Satzes in § 2. Er ist in [1], Kap. VII, für den Fall $\mu = 0$ und $K' = 0$ im zweidimensionalen Raum durchgeführt. Dieselben Schlüsse lassen sich aber in allgemeiner Form im Beweis des Satzes 3 verwenden.

Dieser Satz kann als Ausgangspunkt für die Untersuchung der Räume mit der Krümmung $\geq K'$ dienen.

Da in einem R_K die Forderungen des Satzes 3 erfüllt sind, läßt sich dieser auf Gebiete R_K anwenden. Speziell kann man die Eigenschaften solcher Gebiete R_K untersuchen, in denen die Krümmung mindestens gleich irgendeinem $K' \leq K$ ist. Das sind solche Gebiete R_K, wo der Exzeß eines beliebigen Dreiecks bzgl. K' nichtnegativ ist. Dann ist $\mu_{K'} \geq 0$ und aus Satz 3 folgt

Satz 4. *Ist in einem R_K die Krümmung mindestens $K' \leq K$, so genügen die Winkel α eines beliebigen Dreiecks der Ungleichung*

$$\alpha_{K'} \leq \alpha \leq \alpha_K,$$

wo $\alpha_{K'}$, α_K die Winkel der entsprechenden Dreiecke auf der K'- und der K-Ebene sind.

Ferner gilt

Satz 5. *Ist in einem R_K die Krümmung mindestens $K' \leq K$, so ist der Winkel $\gamma^K(x, y)$ für zwei beliebige von einem Punkt ausgehende Kürzeste eine nichtzunehmende Funktion von x und y.*

Der Beweis dieses Satzes ähnelt dem des Satzes 1, § 3 und ist in [1], Kap. XI erbracht. Daselbst kann man andere Sätze finden, deren Sinn darauf hinausläuft, daß die Eigenschaften der Räume mit der Krümmung $\leq K$ und $\geq K'$ sozusagen etwas Intermediäres zwischen den Eigenschaften der Räume konstanter Krümmung K und K' darstellen. In [1] werden diese Sätze für konvexe Flächen bewiesen, sie lassen sich jedoch in entsprechender Weise verallgemeinern.

3. Regelflächen in einem R_K. Unter einer *Regelfläche* verstehen wir eine Fläche, die von Kürzesten gebildet wird; dabei setzen wir voraus, daß jeder Punkt der Fläche eine Umgebung besitzt, in der sich zwei beliebige Punkte durch eine kürzeste Linie auf der Fläche selbst verbinden lassen. Man kann beweisen, daß in einem R_K eine Fläche, die von Kürzesten gebildet wird, deren Endpunkte stetig zwei rektifizierbare Kurven bestreichen, die angegebene Eigenschaft besitzt. Falls sich eine der Kurven auf einen Punkt reduziert, ist die Fläche ein *Kegel.*

Das wichtigste Resultat über Regelflächen lautet:

Satz 6. *Eine Regelfläche in einem R_K erweist sich vom Standpunkte ihrer inneren Metrik selbst als ein zweidimensionaler Raum mit der Krümmung $\leq K$.*

Das ist eine direkte Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, daß die Regelflächen im euklidischen Raum eine nichtpositive Krümmung besitzen.

Der Beweis des Satzes 6 beruht auf der Untersuchung endlicher Folgen von Kürzesten und auf der Anwendung des Satzes 2.

Wir erwähnen, daß das im § 4, Punkt 4 definierte Flächendreieck eine Regelfläche ist und natürlich selbst ein Dreieck auf dieser darstellt. Daher ist wegen Satz 6 der Satz 5, § 4 über die Winkel des Flächendreiecks eine einfache Wiederholung des Satzes 3, § 3, der die Dreiecke in einem beliebigen R_K betrifft.

Genauso ist wegen Satz 6 der Satz 2, § 5 über den Inhalt einer Fläche, die von einer gegebenen Kontur aufgespannt wird, eine Folgerung des folgenden Satzes:

Satz 7. *In jeder zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit der Krümmung $\leq K$ besitzt das einfach zusammenhängende Gebiet G, das durch eine geschlossene Kurve von der Länge l berandet wird, einen Flächeninhalt, der höchstens gleich dem des Kreises C vom Umfang l auf der K-Ebene ist; und zwar ist der Flächeninhalt des Gebietes G gleich dem Inhalt des Kreises C nur dann, wenn G isometrisch zu C ist.* (Wenn $K > 0$, so wird vorausgesetzt, daß $l < 2\pi/\sqrt{K}$, da andernfalls der Kreis C nicht existiert.)

Der Beweis des ersten Teiles dieses Satzes ist vollkommen analog dem von Satz 2, § 5. Unter etwas engeren Voraussetzungen ist dieser Satz von mir in [3] bewiesen worden.

Wegen Satz 6 ergibt sich aus Satz 7 unmittelbar nicht nur Satz 2, § 5, sondern auch seine Verallgemeinerung:

Eine beliebige Regelfläche F in einem R_K, die von einer rektifizierbaren Kontur mit der Länge l aufgespannt wird, besitzt einen Flächeninhalt, der höchstens gleich dem des entsprechenden Kreises C auf der K-Ebene ist; und zwar ist der Flächeninhalt von F gleich dem von C nur dann, wenn F isometrisch zu C ist.

4. Kegel in einem R_K. In einem R_K sei der Punkt O und die rektifizierbare Kurve L gegeben; X sei ein Punkt von L. Die Kürzesten OX bilden einen Kegel C mit der Spitze O und der Grundlinie L.

Wir sagen, daß der Kegel C *abgewickelt* wird auf einen Kegel (oder, genauer gesagt, auf einen Sektor) C^K in der K-Ebene, wenn die folgende Abbildung von C auf C^K vorliegt:

(1) Der Spitze O des Kegels C entspricht die Spitze O' des Kegels C^K.

(2) Jeder Erzeugenden OX des Kegels C entspricht die Erzeugende $O'X'$ des Kegels C^K, wobei $O'X' = OX$; die Abbildung der Erzeugenden OX und $O'X'$ aufeinander erfolgt unter Beibehaltung der Längen ihrer entsprechenden Teilstücke.

(3) Die Grundlinie des Kegels C wird auf die Grundlinie des Kegels C^K unter Beibehaltung der Längen abgebildet.

(4) Bei der Bewegung von X längs L wird die Kürzeste $O'X'$ monoton um O' gedreht.

Eine solche Abbildung ist selbstverständlich stets möglich und bis auf eine Drehung des Kegels C^K um die Spitze O eindeutig bestimmt.

Ist die Grundlinie L eine Kürzeste, so stellt der Kegel C ein Flächendreieck dar, das vom Punkte O aus aufgespannt wird. Die Figur, die man durch Abwicklung des Flächendreiecks erhält, besitzt folgende Eigenschaften:

Satz 8. *$T = OAB$ sei in einem R_K ein Flächendreieck, das durch die von O nach allen Punkten der Seite AB ausgehenden Kürzesten erzeugt wird. Bei seiner Abwicklung in die K-Ebene entsteht eine Figur $T' = O'A'B'$, die von den Strecken $O'A' = OA$, $O'B' = OB$ und von einem mit seiner Wölbung ins Innere von T' weisenden konvexen Bogen $\overset{\frown}{A'B'}$ berandet wird. Dabei wird der Bogen $\overset{\frown}{A'B'}$ zu einer Strecke und entsprechend T' zu einem Dreieck T^K nur dann, wenn das Flächendreieck T isometrisch zu T^K ist. Findet das nicht statt, so ist*

(1) *der Winkel α' zwischen den Strecken $O'A'$ und $O'B'$ kleiner als der entsprechende Winkel α_K des Dreiecks T^K und*

(2) *der Flächeninhalt S' der Figur T' kleiner als der des Dreiecks T^K.*

In den §§ 4, 5 wurden Sätze bewiesen über die Winkel und den Inhalt von Flächendreiecken, ferner Satz 2, § 5 über den Flächeninhalt eines Kegels, der von einer geschlossenen Kurve so aufgespannt wird, daß diese Kurve als Grundlinie des Kegels dient und seine Spitze ebenfalls auf dieser Kurve liegt.

Diese Sätze erweisen sich als Folgerungen des folgenden allgemeinen Satzes, der sich auf die Abwicklung C^K eines beliebigen Kegels C in einem R_K bezieht.

Satz 9. *Zwischen dem Kegel C in einem R_K und dem Kegel C^K, der durch Abwicklung des Kegels C in die K-Ebene entsteht, gelten folgende Beziehungen:*

(1) *Sind α und α_K die Winkel in den Spitzen der Kegel C und C^K, so ist*

$$\alpha \leq \alpha_K,$$

und $\alpha = \alpha_K$ nur dann, wenn der Kegel C isometrisch zu C^K ist.

(2) *Ist M eine Kurve auf C und M^K die entsprechende Kurve auf C^K, so gilt für deren Längen ϱ die Beziehung:*

$$\varrho(M) \leq \varrho(M^K).$$

Ist dabei M eine rektifizierbare Kurve, die alle Erzeugenden des Kegels C durchschneidet (d. h. die mit jeder Erzeugenden einen von den Endpunkten verschiedenen gemeinsamen Punkt hat), so ist

$$\varrho(M) = \varrho(M^K)$$

nur bei Isometrie der Kegel C und C^K möglich.

(3) *Sind S und S^K die Flächeninhalte der Kegel C und C^K, so ist*

$$S \leq S^K$$

und $S = S^K$ nur dann, wenn der Kegel C isometrisch zu C^K ist.

Die Behauptung (1) entspricht gleichsam dem Satz 4, § 3 über die Dreieckswinkel. In Verbindung mit Satz 8 ergibt er speziell den Satz 6, § 4 über den Winkel des Flächendreiecks. Die Behauptung (2) entspricht Satz 2, § 3.

Die Behauptung (3) hat offenbar Satz 2, § 5 über den Inhalt der von einer geschlossenen Kontur aufgespannten Fläche zur Folge. In Verbindung mit Satz 8 ergibt diese Behauptung außerdem Satz 1, § 5 über den Inhalt des Flächendreiecks.

5. Die Abweichung einer Kurve von einer Kürzesten. Die Resultate von § 3 über Kürzeste in einem R_K, nämlich die Sätze 5 und 6, § 3 über die Eindeutigkeit der Kürzesten im R_K und ihre stetige Abhängigkeit von den Endpunkten, werden von dem folgenden Satz wesentlich ergänzt und verschärft:

Satz 10. *Unterscheidet sich die Länge einer Kurve in einem R_K, die die gegebenen Punkte A und B verbindet, wenig vom Abstand zwischen diesen Punkten, so weicht die Kurve von der Kürzesten AB wenig ab.*

Diese Behauptung hat offenbar die Eindeutigkeit der Kürzesten AB sowie die nahe Lage von Kürzesten mit nahe gelegenen Endpunkten zur Folge. Sind nämlich die Punkte A_n und B_n nahe A und B, so unterscheidet sich das Polygon $AA_n + A_nB_n + B_nB$ seiner Länge nach wenig von AB, und es weicht demnach wenig von AB ab.

Exakt kann Satz 10 so formuliert werden:

In einem R_K seien die Punkte A, B, deren Abstand r ist, durch eine Kurve L mit der Länge l verbunden. Dann ist die Abweichung der Kurve L von der Kürzesten AB (d. h. das Maximum des Abstands der Punkte der Kurve L von AB) höchstens gleich der Höhe des gleichschenkligen Dreiecks, das in der K-Ebene eine Basis von der Länge r und zwei Schenkel mit der Gesamtlänge l hat. Speziell für $K < 0$, d. h. im Raum nichtpositiver Krümmung, genügt die Abweichung h der Kurve L von der Kürzesten AB der Ungleichung

$$h^2 \leq \frac{1}{4}(l^2 - r^2)\,.$$

Im Fall $K > 0$ wird natürlich vorausgesetzt, daß das erwähnte Dreieck existiert, so daß $l + r < \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$. (In der K-Ebene stellen die beiden Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks eine Kurve dar, die bei gegebener Länge von der gegebenen, ihre Endpunkte verbindenden Strecke am meisten abweicht.)

Beweis: Die Kurve L verbinde die Punkte A und B. Wenn wir vom Punkt A nach allen Punkten der Kurve L die Kürzesten ziehen, erhalten wir einen Kegel, den wir in die K-Ebene abwickeln. Dann geht die Kurve L in die Kurve L^K auf der K-Ebene unter Erhaltung der Länge und des Abstands zwischen ihren Endpunkten A', B' über.

Gleichzeitig ergibt sich aus der Behauptung (2) des Satzes 9, daß die Abweichung der Kurve L^K von der Strecke $A'B'$ mindestens gleich der Abweichung der Kurve L von der Kürzesten AB ist. Die Ellipse, von gleicher Länge wie L^K, mit den Brennpunkten A', B', deren große Achse gleich der Summe der Brennradien ist, zeigt unmittelbar, daß sich das Maximum der Abweichung dann ergibt, wenn L^K aus zwei gleichlangen Strecken besteht. Damit ist Satz 10 bewiesen.

Dieser Beweis stützt sich auf Satz 9, dessen Beweis wir nicht angegeben haben; er ist, nebenbei bemerkt, ziemlich kompliziert. Indessen läßt sich Satz 10 bedeutend einfacher für den Fall $K \leq 0$ beweisen oder zumindest unter der Voraussetzung, daß für $K > 0$ der Abstand zwischen den Punkten A und B der Ungleichung $r < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ genügt. Unter dieser Voraussetzung läßt sich der Beweis folgendermaßen durchführen:

Wir wählen auf der Kurve L, die die Punkte A und B verbindet, den Punkt C, der von der Kürzesten AB die größte Entfernung hat. Ist D ein Punkt auf AB, der C am nächsten liegt, so stellt der Abstand CD gerade die Abweichung der Kurve L von der Kürzesten AB dar:

$$CD = h\,.$$

Wir ziehen die Kürzesten AC und CB. Ist l die Länge der Kurve L, so ist

$$AC + CB \leq l\,.$$

In der K-Ebene konstruieren wir das Dreieck $A'B'C'$, das dem Dreieck ABC entspricht. Die Abweichung seiner Seiten $A'C'$, $B'C'$ von der Basis $A'B'$ ist gerade gleich dem Abstand der Ecke C' von $A'B'$. (Im Falle $K \leq 0$ ist das evident; im Falle $K > 0$ braucht es dagegen nicht zu sein. Ist jedoch $A'B' < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, so ist das auch richtig.)

Nach Satz 2, § 3 sind die Abstände von Punkten auf den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ mindestens gleich den Abständen entsprechender Punkte auf den Seiten des Dreiecks ABC. Daher ist die Abweichung des Polygons $A'C' + C'B'$ von der Basis $A'B'$ mindestens gleich der Abweichung des Streckenzuges $AC + CA$ von der Kürzesten AB. Folglich ist sie sicher mindestens gleich $h = CD$. Somit ist h höchstens gleich dem Abstand der Ecke C' von der Basis $A'B'$. Aber für eine gegebene Basis $A'B'$ und eine gegebene Seitensumme $A'C' + C'B'$ erreicht der Abstand der Ecke C' von der Basis $A'B'$ beim gleichschenkligen Dreieck sein Maximum. Da außerdem $A'C' + C'B' \leq l$, so folgt hieraus, daß h keinesfalls größer als die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis AB und der Schenkelsumme l ist.

Die erhaltene Abschätzung für die Abweichung einer Kurve von der Kürzesten führt sofort zur Abschätzung der Abweichung d (nach Fréchet) zweier Kurven, die zwei gegebene Punkte A, B verbinden. Und zwar ist deren Abweichung voneinander höchstens gleich der Summe ihrer Abweichungen von der Kürzesten AB. Demnach wird die Abweichung durch den Abstand $r = AB$ und die Längen l_1, l_2 dieser Kurven abgeschätzt, und außerdem ist sie natürlich von K abhängig.

Speziell ist im Falle $K = 0$

$$d^2 + r^2 \leq \frac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2).$$

Diese Abschätzung wurde von A. BEURLING [5] für den Fall zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten auf einem völlig anderen Wege erhalten. Unsere Ableitung verallgemeinert jene nicht nur bedeutend, sondern erschließt, wie uns scheint, ihren einfachen geometrischen Inhalt.

Literatur

[1] ALEXANDROW, A. D., Die innere Geometrie der konvexen Flächen. Berlin, 1955.

[2] ALEXANDROW, A. D., Dasselbe, Nachtrag.

[3] ALEXANDROW, A. D., Die innere Metrik konvexer Flächen im Raum konstanter Krümmung. Doklady AN SSSR, 45 (1944), Nr. 1, 3—6.

[4] ALEXANDROW, A. D., Isoperimetrische Ungleichungen auf krummen Flächen. Doklady AN SSSR, 47 (1945), 239—242.

[5] BEURLING, A. — Sur la géometrie métrique des surfaces à curbure totale ≤ 0. Meddelanden Lunds Univ. Mat. Sem., Supplementband, (1952), 7—11.

[6] BLASCHKE, W. — Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. 1. (1930), § 112.

[7] BUSEMANN, H. — Spaces with non-positive curvature. Acta Math. 48 (1947), 234—267.

[8] HUREWICZ, W., and WALLMANN, H. — Dimensions Theory, 1941.