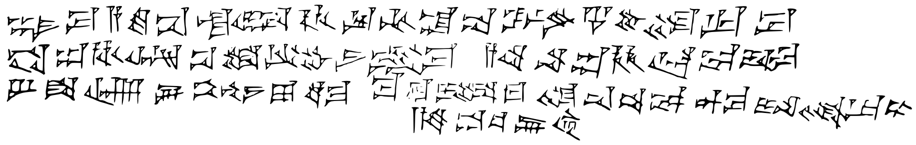
Землемерная формула

А. Гиль и А. Петрунин

Землемеры считают площадь четырёхугольника как произведение полусумм противоположных сторон; то есть, за площадь $S(ABCD)$ четырёхугольника $ABCD$ берут произведение

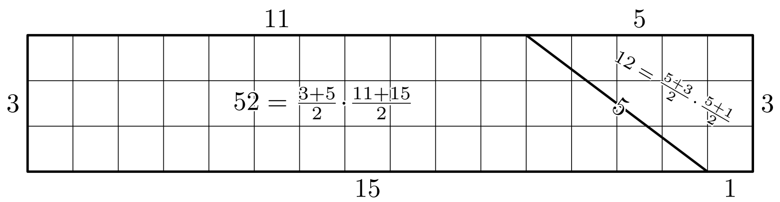
$$\frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{BC + DA}{2}.$$

Эта формула очень древняя. В Национальном музее Ирака хранится глиняная табличка с инвентарным номером IM 52301 — это так называемая математическая табличка из Тель-Хармала (древний Шадуппум). Она относится к раннему старовавилонскому периоду (XVIII-й век до нашей эры). На основной части таблички обсуждаются две геометрические задачи, а на её боковой стороне несколько путанно говорится следующее: «Если у



площади неравные стороны, пусть скажут сумму длин; домножь на сумму ширин; возьми четверть; то, что получишь, будет площадь.»[1] То есть описывается формула $(AB + CD)\cdot(BC + DA)/4$ эквивалентная нашей, здесь $AB + CD$ — сумма длин, а $BC + DA$ — сумма ширин.

В том, что эта формула, вообще говоря, неверна, можно убедиться, рассмотрев следующий рисунок. В нём прямоугольник 3×16 разрезан на две

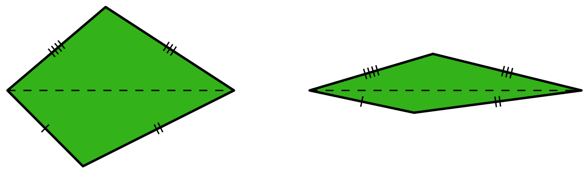


трапеции. Если верить формуле, то площади трапеций равны 52 и 12. Применив формулу к изначальному прямоугольнику, получим $48 = 3\cdot16$. Поскольку $52 > 48$, часть оказалась больше целого. В частности, нам удалось увеличить площадь разрезав прямоугольник на части. Смысл понятия

[1] Текст не полностью сохранился, и его расшифровка неоднозначна. Прорисовка из статьи Таха Бакира [1] приложена для создания настроения. Интерпретация текста из статьи Йорана Фриберга [2, 3].

«площадь» как раз в том, чтобы запретить подобные махинации. То есть формула противоречит самой себе и, значит, верной быть не может.[2]

Заметим ещё, что для расчёта площади недостаточно знать стороны четырёхугольника. Например, удлинняя диагональ четырёхугольника слева



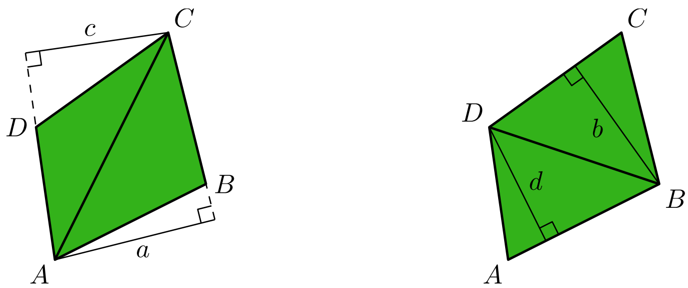
на рисунке получаем четырёхугольник справа с соответсвенно равными сторонами, при этом площадь заметно уменьшается.

Отметим, что землемерная формула правильно вычисляет площадь прямоугольников; сейчас мы убедимся, что для всех остальных четырёхугольников формула завышает площадь.

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно разбить на треугольники двумя способами: проведя диагональ AC или диагональ BD. Обозначим высоты в этих треугольниках через a, b, c и d, как показано на рисунке. Так как перпендикуляр короче наклонной, получим

$$AB \geqslant a, \quad BC \geqslant b, \quad CD \geqslant c, \quad DA \geqslant d.$$

Заметим, что равенства достигаются только если углы $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ и $\angle A$ прямые — это нам скоро пригодится.



$$S(ABCD) = S(ABC) + S(CDA) \quad \text{и} \quad S(ABCD) = S(BCD) + S(DAB)$$

Воспользовавшись тем, что площадь треугольника равна половине про-

[2] То, что всякому многоугольнику можно приписать значение площади так, чтобы площадь частей равнялась площади целого — это не простая теорема; в школьных учебниках её обычно принимают без доказательства. Можно, конечно, разбить многоугольник на треугольники, посчитать площадь каждого, применив известную формулу, и сложить результаты. Однако, придётся доказывать, что при другом разбиении результат получится такой же — в этом и кроется трудность.

изведения основания на высоту, получаем

$$\begin{aligned}2{\cdot}S(ABCD) &= S(ABC)+S(CDA)+S(BCD)+S(DAB) = \\ &= \frac{a{\cdot}BC}{2}+\frac{c{\cdot}DA}{2}+\frac{b{\cdot}CD}{2}+\frac{d{\cdot}AB}{2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{AB{\cdot}BC}{2}+\frac{CD{\cdot}DA}{2}+\frac{BC{\cdot}CD}{2}+\frac{DA{\cdot}AB}{2} = \\ &= \frac{(AB+CD){\cdot}(BC+DA)}{2}.\end{aligned}$$

И значит землемерная формула выдаёт значение не меньше истинной площади.

Если же достигается равенство, то $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $DA=d$. Как мы уже знаем, это означает, что все углы в четырёхугольнике прямые; то есть, $ABCD$ — прямоугольник.

Если четырёхугольник $ABCD$ не сильно отличается от прямоугольника, то формула выдаёт очень хорошее приближение. Например, если каждый из углов $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ и $\angle D$ отличается от прямого не больше чем на $7°$ (что весьма ощутимо), то формула ошибётся меньше чем на 1% (это запросто может быть меньше ошибки ваших измерений). Так что смело пользуйтесь формулой в практических целях и не смейтесь над землемерами.

Задачи. Убедитесь, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей и попробуйте ответить на следующие вопросы:

◇ Для каких ещё четырёхугольников эта формула выдаёт правильное значение площади?

◇ Верно ли, что половина произведения длин диагоналей не может быть меньше площади четырёхугольника?

◇ Что можно сказать о четырёхугольнике, для которого обе формулы дают верное значение площади?

Список литературы

[1] T. Baqir. «Another Important Mathematical Text from Tell Harmal». *Sumer* 6 (1950), 130—148.

[2] J. Friberg. «Mathematics at Ur in the Old Babylonian period». *Revue d'Assyriologie et d'archéologie orientale* 94.2 (2000), 97—188.

[3] C. Gonçalves. *Mathematical tablets from Tell Harmal.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. 2015.

[4] R. C. Gupta. «Primitive area of quadrilateral and averaging». *Gaṇita-Bhāratī* 19.1-4 (1997), 52—59.

[5] M. Josefsson. «Five proofs of an area characterization of rectangles». *Forum Geom.* 13 (2013), 17—21.

[6] E. R. Tou. *Accuracy of Quadrilateral Area Measurement in the Ancient World.* Joint Mathematics Meetings, New Orleans, LA. 2011.