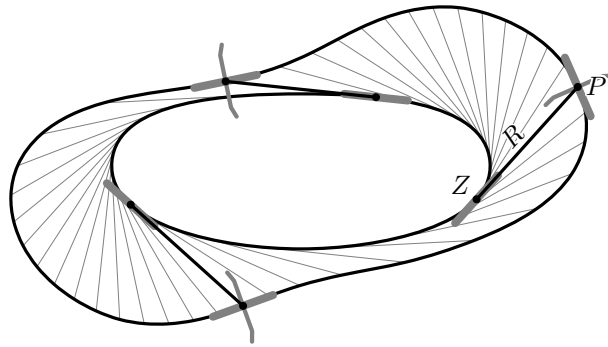


Дидона с велосипедом

Антон Петрунин

Мы покажем, как, используя велосипед, можно решить задачу Дидоны. То есть доказать, что из всех фигур, зажатых между кривой длины не больше L и прямой через её концы полукруг имеет наибольшую площадь.

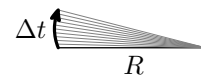
Это первая известная изопериметрическая задача. Царице Дидоне пришлось отгораживать ремнём из бычьей шкуры участок у берега моря под город Карфаген, и это случилось в конце девятого века до нашей эры. Обычная изопериметрическая задача говорит, что из всех замкнутых кривых на плоскости данной длины окружность ограничивает наибольшую площадь. Эта задача легко сводится к задаче Дидоны и наоборот — попробуйте в этом убедиться сами.



Нам понадобится математический велосипед. Будем считать, что рама велосипеда — это отрезок постоянной длины (скажем, R); задний его конец (Z) может двигаться только в направлении рамы, а передний (P) в любом направлении. Это вполне согласуется с практикой: если исключить проскальзывание, то заднее колесо обычного велосипеда движется вдоль рамы, а переднее можно направить как угодно.

Предположим, что переднее колесо движется с единичной скоростью. В этом случае составляющая его скорости, перпендикулярная раме, не превосходит 1. Поскольку заднее колесо движется вдоль рамы, угловая скорость рамы не может превышать $1/R$ по модулю.

Теперь представим, что мы закрашиваем область под рамой велосипеда; то есть закрашивается объединение всех положений рамы. За короткий промежуток времени Δt (в первом приближении) закрасится треугольник с основанием R и высотой не больше Δt , а значит скорость закрашки не превысит $R/2$.



Предположим, что переднее колесо прошло вдоль кривой длины L , и при этом закрасилась площадь S , а рама повернулась на угол Θ ; угол из-

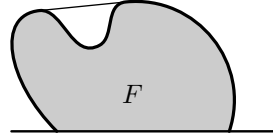
меряется в радианах. Из вышесказанного получаем, что

$$(*) \quad \Theta \leq L/R \quad \text{и} \quad S \leq R \cdot L/2.$$

Эти наблюдения сыграют ключевую роль в нашем доказательстве.

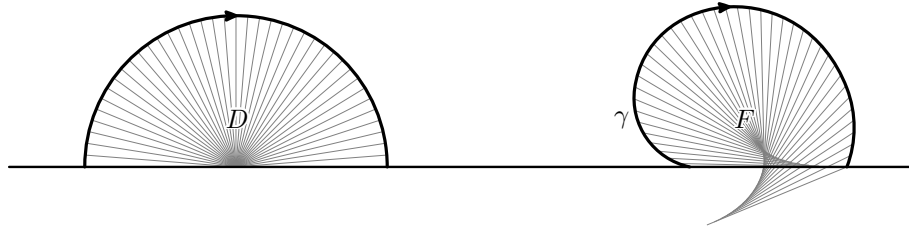
Пусть F — фигура, зажата между кривой γ длины не больше L с концами на прямой и самой прямой. Далее пусть D — полукруг, длина дуги которого равна L ; значит, его радиус равен $R = L/\pi$, а площадь $R \cdot L/2 = \pi \cdot R^2/2$. Нам надо доказать, что площадь F не превосходит площади D .

Предположим, что это неверно, и фигура F — контрпример. Фигуру F можно считать выпуклой: иначе, выпрямляя вогнутые участки γ , как показано на рисунке, можно увеличить площадь и одновременно уменьшить длину, так что в результате мы получим выпуклый контрпример.



Далее можно считать, что граничная кривая γ гладкая. Это позволит нам проехать вдоль γ передним колесом велосипеда с единичной скоростью. Действительно, если слегка уменьшить фигуру гомотетией, её площадь останется больше площади D , а длина кривой станет строго меньше L . После этого кривую можно сгладить достаточно малым возмущением, оставив её выпуклой.

Теперь рассмотрим следующие две картинки. На левой изображён полукруг D . Представим, что мы провели переднее колесо велосипеда вдоль его дуги и в начальный момент рама образовывала радиус полукруга. В этом случае достигаются оба равенства в (*). Действительно, рама будет оставаться радиусом во время всего движения, а заднее колесо останется в центре. Поэтому рама повернётся на угол $\pi = L/R$, и, проехав вдоль дуги, мы закрасим весь полукруг, площадь которого равна $R \cdot L/2 = \pi \cdot R^2/2$.



На правой картинке мы проделали то же для кривой γ . Опять же, считаем, что в начальный момент рама шла вдоль граничного отрезка так, что вся фигура лежала справа от рамы. Если мы убедимся, что вся фигура F закрасится после проезда передним колесом вдоль γ , второе неравенство в (*) приведёт к противоречию и завершит доказательство.

Предположим, что во время всего пути руль был повёрнут вправо или точно прямо, а значит рама велосипеда не могла поворачиваться против часовой стрелки и была направлена наружу из фигуры. По первому неравенству в (*) за время всего пути рама повернулась не больше чем на $\pi = L/R$. То есть в последний момент она располагалась на прямой или ниже. В самом конце руль также не мог быть повёрнут влево, а значит вся фигура F лежала слева от рамы.

Выберем точку x в F . В начале движения точка x лежит справа от рамы, а в конце слева от неё. Поэтому в некий промежуточный момент точка переходит с правой стороны рамы на левую. В этот момент точка должна лежать на прямой, проходящей вдоль рамы, и она может лежать на самой раме либо на одном из двух лучей, продолжающих раму: позади заднего колеса или впереди переднего. В первом случае точка x закрашена. Второй случай невозможен, ведь рама не поворачивалась влево, а значит переход происходил бы не справа налево, а наоборот. Последний случай также невозможен, ведь луч перед рамой всё время указывает наружу фигуры F , а поскольку фигура выпуклая, весь луч лежит снаружи.

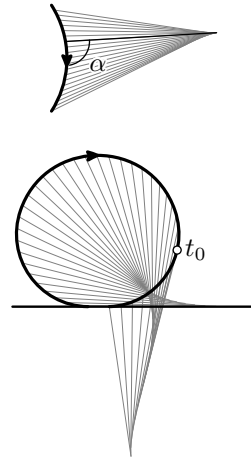
Итак, любая точка x фигуры закрашена; другими словами, закрашена вся фигура.

Осталось разобрать случай, когда руль меняет направление поворота. То есть в какой-то момент он был повёрнут влево, и значит рама направлена внутрь F , как показано на рисунке. Такое действительно может случиться: на последней картинке показан такой вариант развития событий.

Как и раньше, мы считаем, что фигура располагается справа по ходу кривой γ . Посмотрим на то, как меняется угол α между рамой и направлением движения.

Пока переднее колесо повёрнуто влево относительно рамы, рама вращается против часовой стрелки. В то же время направление касательной к выпуклой кривой γ вращается по часовой стрелке. Поэтому угол α не может уменьшаться. Значит, в какой-то момент угол α оказался нулевым. В этот момент переднее колесо движется точно в сторону заднего, то есть велосипед едет назад.

Пусть t_0 — первый такой момент времени. Тогда вся фигура закрасилась уже к моменту t_0 . Действительно, в начале вся фигура лежит справа от рамы, а в момент времени t_0 — слева. Между этими моментами руль был повёрнут вправо или точно прямо — осталось повторить доказательство основной части.



Замечания. Приведённое доказательство основано на идее Гэри Лолора [2].

Попытайтесь разобраться, как и когда по следам велосипеда можно определить направление его движения, а также различить следы переднего и заднего колеса. Это заставит вас переоткрыть ощутимую часть дифференциальной геометрии кривых, а кроме того, вы получите удовольствие.

Математический велосипед активно изучается, и с ним связано большое число открытых вопросов [1, 3]. Например, предположим, что след переднего колеса велосипеда совпадает со следом заднего и при этом велосипед не едет по прямой. Обязан ли такой след иметь самопересечения?

Список литературы

- [1] R. Foote, M. Levi и S. Tabachnikov. «Tractrices, bicycle tire tracks, hatchet planimeters, and a 100-year-old conjecture». *Amer. Math. Monthly* 120.3 (2013), 199—216.
- [2] G. Lawlor. «A new area-maximization proof for the circle». *Math. Intell.* 20.1 (1998), 29—31.
- [3] M. Levi и S. Tabachnikov. «On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin’s conjecture, and oscillation of unicycle tracks». *Experiment. Math.* 18.2 (2009), 173—186.