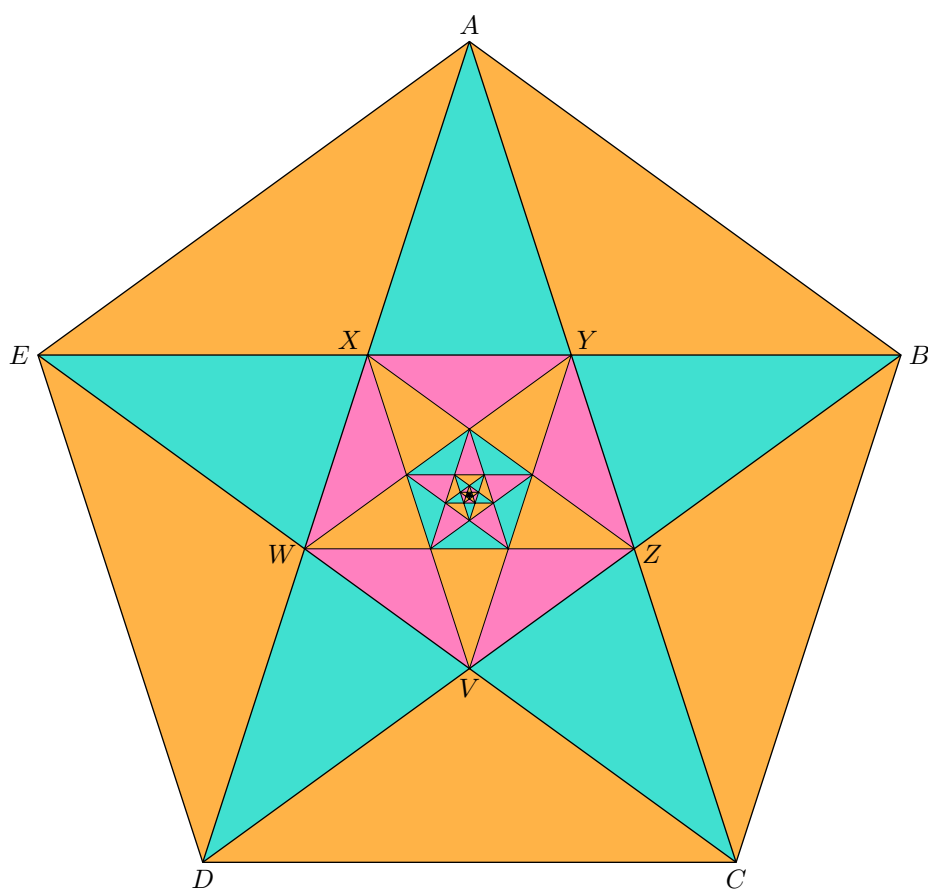


Бесконечная пентаграмма

Антон Петрунин

Следующая картинка могла привести к великому математическому открытию древности. На ней изображён правильный пятиугольник с вписанной звездой, в которую вписана ещё звезда и так далее.



Заметим, что звёзды быстро уменьшаются, и их стороны становятся короче любого наперёд заданного отрезка. Сейчас мы увидим, как из этого наблюдения выводится, что сторона правильного пятиугольника несоизмерима с диагональю, то есть отношение диагонали к стороне иррационально.

Сначала представим себя древнегреческими геометрами. Алгебраических обозначений ещё нет: остаётся только чертить, сравнивать отрезки и рассуждать. Ради удобства мы всё же будем писать формулы, но только если их можно объяснить короткой фразой.

Доказательство несоизмеримости CD и EB . Напомним, что отрезки a и b называются *соизмеримыми*, если у них есть *общая мера*; то есть можно найти отрезок r , который укладывается целое число раз и в a , и в b .

Пусть $a > b$ и $c = a - b$. Если r — общая мера a и b , то r — общая мера b и c . Действительно, если $a = m \cdot r$ и $b = n \cdot r$ при целых m и n , то $c = (m - n) \cdot r$ и $(m - n)$ — тоже целое.

Чуть ниже мы докажем следующие два равенства:

$$(*) \quad WZ = EB - CD \quad \text{и} \quad XY = CD - WZ.$$

Тогда, воспользовавшись предыдущим абзацем, получим, что если r — общая мера EB и CD , то r — общая мера CD и WZ , а также XY и WZ .

В частности, если r — общая мера стороны и диагонали первого пятиугольника, то r — общая мера стороны и диагонали следующего пятиугольника. Повторяя это рассуждение раз за разом, получим, что у всех пятиугольников нашей цепочки сторона и диагональ имеют общую меру r . Однако в этой цепочке найдутся совсем маленькие пятиугольники — со сторонами меньше r , а это невозможно — отрезок r не может уложиться целое число раз в отрезке, который короче r .

Итак, осталось доказать (*). После этого предположение, что сторона соизмерима с диагональю, приведёт нас к противоречию, то есть мы получим, что *диагональ не соизмерима со стороной*.

Заметим, что прямые EB , DC и WZ параллельны друг другу, ведь они все перпендикулярны оси симметрии картинки. Аналогично $AC \parallel ED \parallel XV$ и $BD \parallel AE \parallel YW$. Отсюда заключаем, что $EYCD$ и $YBZW$ — параллелограммы. В частности,

$$DC = EY \quad \text{и} \quad WZ = YB = EB - EY = EB - CD.$$

Итак, мы доказали первое равенство в (*).

Далее, $XY = EY - EX$. По симметрии $EX = YB$, а выше мы доказали, что $YB = WZ$ и $EY = CD$. Отсюда следует второе равенство в (*).

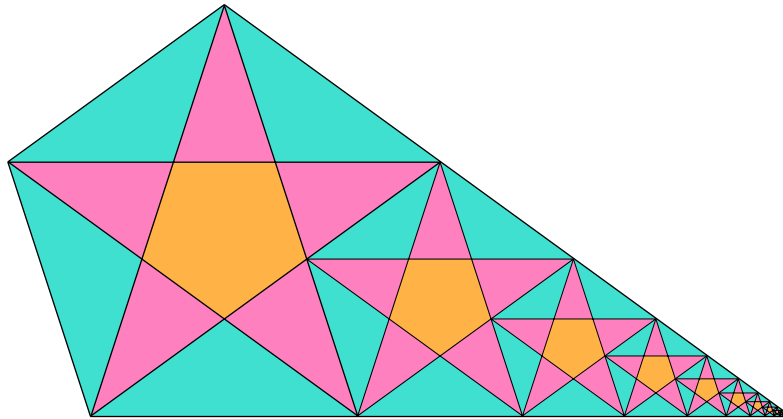
Немного истории. Открытие несоизмеримых отрезков приписывают Гиппасу из Метапонта, жившему в VI веке до нашей эры, но совсем неизвестно, как он это сделал. Рассуждение выше даёт лишь один из возможных вариантов; оно приводится, например, Джеймсом Чойкой.¹

Открытие несоизмеримых отрезков — это, по сути, открытие иррациональных чисел. Отношение диагонали правильного пятиугольника к стороне равно золотому сечению $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, и мы доказали его иррациональность. Но первым могло быть открыто и другое иррациональное число, например $\sqrt{2}$ (многие его считают первым, хотя свидетельств этому нет).

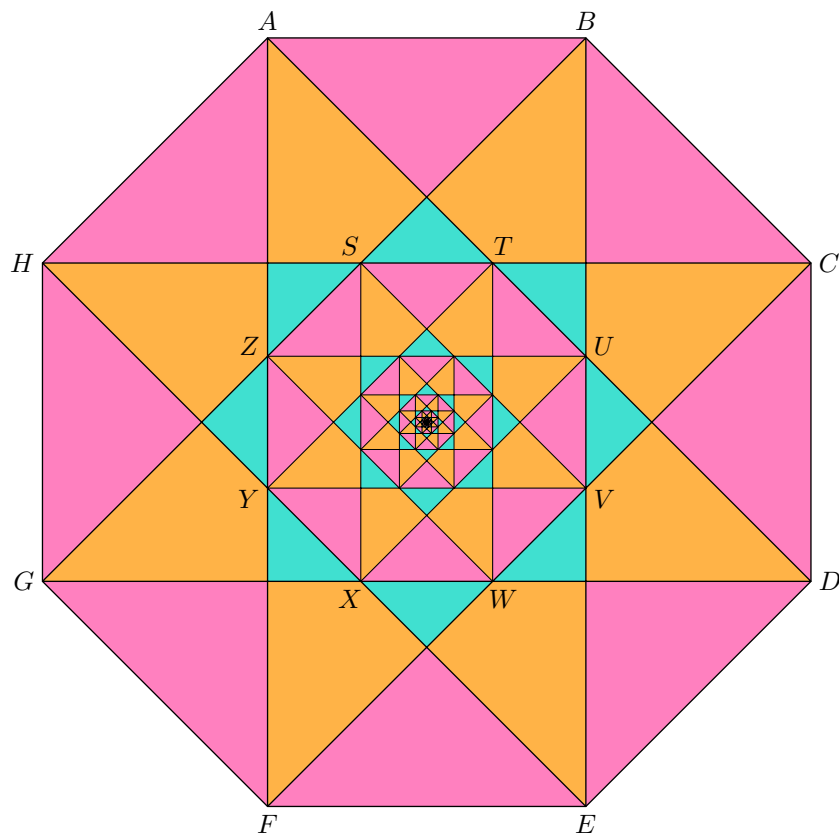
В пользу золотого сечения говорит следующее: есть указания на то, что знак пентаграммы был хорошо известен пифагорейцам, и если так, то трудно не начать вписывать одну пентаграмму в другую. Кроме того, используемый нами приём последовательного вычитания меньшего отрезка из большего был известен греческим геометрам с самых ранних пор. Кстати, Гиппасу приписывается и открытие додекаэдра, а это тоже косвенно подтверждает связь с правильным пятиугольником.

¹J. Choike. «The Pentagon and the Discovery of an Irrational Number». *The Two-Year College Mathematics Journal* 11.5 (1980), 312—316.

Задача 1. Попробуйте заново доказать, что диагональ правильного пятиугольника несоизмерима с его стороной, используя следующий чертёж.



Задача 2. Рассмотрев следующий чертёж, попробуйте доказать, что сторона правильного восьмиугольника несоизмерима с его диагональю, отсекающей две вершины. Выведите отсюда, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.



Подсказка: убедитесь, что $TCDW$ — квадрат и $HC = (1 + \sqrt{2}) \cdot HG$.